Universidade de Aveiro Departamento de Matemática,
2010

Natalina Sousa Silva

Processos de Difusão. Uma aplicação nos Seguros

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática,
2010

Natalina Sousa Silva

Processos de Difusão. Uma aplicação nos Seguros

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro, em colaboração com a Universidade de Cabo Verde, para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada à Engenharia, realizada sob a orientação científica da Prof Doutora Adelaide de Fátima Baptista Valente Freitas, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de AveiroUniversidade de Aveiro.

Apoio Financeiro do Instituto Português de Apoio ao Desenvolvimento (IPAD)

COOPERAÇÃO PORTUGUESA

o júri / the jury

presidente / president	**Prof Doutor Domingos Moreira Cardoso** Professor Catedrático da Universidade de Aveiro (por delegação do Reitor da Universidade de Aveiro)
vogais / examiners committee	**Prof Doutora Maria Fernanda Nunes Diamantino** Professora Auxiliar do Departamento de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
vogais / examiners committee	**Prof Doutora Adelaide de Fátima Baptista Valente Freitas** Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro (orientadora)

agradecimentos / acknowledgements

À Doutora Adelaide de Fátima Baptista Valente Freitas pela Orientação científica deste trabalho e ainda pelo apoio, incentivo e paciência demonstrado ao longo do mesmo.

À minha família que sempre me apoiou ao longo da minha formação.

Ao IPAD pelo apoio financeiro, à Universidade de Aveiro e à Universidade de Cabo Verde e todo o pessoal, docente e não docente, que tornaram possível a concretização da realização do curso de Mestrado em Matemática Aplicada à Engenharia, em Cabo Verde.

A todos que, directa ou indirectamente, contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Resumo

Na presente dissertação estudamos alguns exemplos clássicos de processos estocásticos e suas propriedades dando especial destaque ao movimento Browniano (ou processo de Wiener) e processos derivados deste. Analisamos uma aplicação nos Seguros onde é proposta a modelação das indemnizações agregadas por um processo de difusão por saltos. Com base na transformada conjunta de Laplace da distribuição do processo de difusão por saltos e o seu processo integrado, estimamos as indemnizações agregadas acumuladas quando o montante das indemnizações segue uma mistura de duas distribuições exponenciais. Partindo de uma aplicação numérica, comparamos os resultados dos valores médios e da variabilidade das indemnizações agregadas quando sujeitas a uma taxa de juros determinística e uma taxa de juros estocástica, e para diferentes valores dos parâmetros daquela mistura.

Abstract

The aim of this dissertation is to study some classic examples of stochastic processes and their properties, emphasizing the Brownian motion (or Wiener process) as well as the processes derived from it. We analyze an application for Insurance using a jump diffusion process for the the aggregate accumulated claims and assuming that jump size follows a mixture of two exponential distributions. For a particular application, we compare the average and the variance of the aggregate accumulated claims taking into account both deterministic and stochastic interest rates, and for different values of the parameters of the mixture distribution.

Conteúdo

Capítulo 1

Enquadramento geral

1.1 Introdução

Ao estudar Probabilidades evidenciamos as experiências aleatórias para as quais, contrariamente às determinísticas, não se conseguem prever com exactidão qual será o seu objecto ou resultado a partir de um conjunto de condições conhecidas. Construímos então modelos matemáticos para experiências que, embora mantendo esse conjunto de condições físicas de realização inalteráveis, podemos predizer o resultado dentro de um conjunto de possibilidades distintas.

Algumas das ferramentas que servem de apoio à Teoria das Probabilidades são as noções de espaço de probabilidade e de variável aleatória, e a Teoria dos Conjuntos.

É fácil perceber que a questão de manutenção das condições em que se realizam as experiências aleatórias é um entrave à modelação de muitos fenómenos aleatórios. Na realidade, muitas vezes não é possível, nem sequer desejável, supor que as condições se mantêm inalteráveis.

Para a classe de fenómenos aleatórios que evoluem no tempo, ou que dependem de um determinado parâmetro real, genericamente designado por [1] t, o objectivo é construir

[1]A notação t deve-se a que, em muitas situações, este parâmetro tem o significado de *tempo*, embora existam fenómenos em que o parâmetro t não esteja relacionado com nenhuma medida temporal.

modelos matemáticos em que não só o resultado da experiência seja imprevisível como também as condições da realização possam variar, produzindo eventuais alterações nos valores possíveis para os resultados da experiência e para a sua distribuição. Esses modelos são definidos por processos estocásticos.

De uma forma informal, diremos que um processo estocástico é um modelo matemático utilizado para o estudo de fenómenos aleatórios que evoluem com um parâmetro e tem como resultados possíveis funções às quais chamamos trajectórias.

Historicamente, atribui-se a Galton (1822-1911) o primeiro estudo de um processo estocástico a propósito da sobrevivência dos nomes de famílias em Inglaterra. Muitos outros nomes estão também ligados à Teoria dos Processos Estocásticos como Einstein, Erlang, Kolmogorov, Markov, sem deixar de referir Doob, as obras de Blanc-Lapierre, além dos trabalhos de Fisher, Feller, Wiener e Levy.

São muitas as aplicações dos processos estocásticos em diferentes domínios da ciência tais como Física, Biologia, Engenharia, Economia, Actuariado, Seguros, etc.

O Actuariado (ou Ciência Actuarial) tem como objectivo a análise de riscos e expectativas, combinando conhecimentos específicos de Matemática Financeira e Estatística [12],[3]. Os Seguros poder-se-á dizer que resultam de operações usando técnicas de Actuariado e tomam a forma jurídica de um contrato entre o segurador e o segurado mediante o pagamento de um prémio que cobre uma indemnização no caso de um prejuízo resultante de um acontecimento imprevisto.

Na presente dissertação iremos analisar uma aplicação dos processos estocásticos nos Seguros. Recentemente muitos trabalhos têm sido elaborados com o objectivo de analisar a modelação de flutuações do mercado usando processos de difusão (ver, por exemplo, referências contidas em [7]). No campo dos Seguros, a Teoria dos Processos Estocásticos tem sido de grande utilidade para o cálculo de prémios com taxas de juros constantes, [9],[8]. Nesta dissertação analisamos a modelação do montante das indemnizações agregadas quando sujeito a uma taxa de juro determinística e a uma taxa de juro estocástica.

1.2 Generalidades sobre processos estocásticos

Dada a existência de muitas definições de processo estocástico, com mais ou menos formalismos, optamos pela definição a seguir por ser de fácil interpretação.

Definição 1.2.1 (Processo estocástico) *Seja S um espaço amostral e T um qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$. Se, para qualquer $t \in T$, a função $X(\omega, t)$, com $\omega \in S$, definir uma variável aleatória, então à família de funções aleatórias $\mathcal{X} = \{X(\omega, t) : \ \omega \in S, \ t \in T\}$ chamamos processo estocástico.*

Um processo estocástico será pois uma família de variáveis aleatórias indexadas no tempo. Por simplificação de escrita, omitiremos o elemento ω, como habitualmente se faz na literatura especializada, e denotaremos o processo $\mathcal{X}$ por $\{X(t), \ t \in T\}$. Se o espaço T do parâmetro temporal t for contínuo temos um processo estocástico de tempo contínuo, e se T for um espaço discreto temos um processo estocástico de tempo discreto. Para cada $\omega_i \in S$, o conjunto de valores $\{X(\omega_i, t), \ t \in T\}$ é chamado realização do processo ou função amostra do processo e a sua representação gráfica por trajectória.

Uma vez que o processo estocástico é uma colecção de variáveis aleatórias, para fazer a sua caracterização há que especificar todos os possíveis vectores de variáveis aleatórias que o constituem e o seu comportamento probabilístico conjunto.
Sejam $t_i \in T$, $i = 1, 2, \cdots, k$, os instantes em que se definem as variáveis $X_1, \cdots, X_k$. O processo estocástico $\mathcal{X} = \{X(t), \ t \in T\}$ fica caracterizado se se conhecerem as funções de distribuição conjunta $F_{X_1,X_2,\cdots,X_k}(x_1, \cdots, x_k)$, para qualquer k e qualquer escolha de índices $t_1, t_2, \cdots, t_k$. Em particular, se o espaço de estados do processo $\mathcal{X}$ for discreto, $\mathcal{X}$ será então caracterizado por todas as funções massa de probabilidade conjunta.
Para algumas funções é fácil construir e especificar algumas delas. No entanto, existem processos úteis que obedecem a certas propriedades que permitem que o conjunto de funções, a definir para a caracterização de $\mathcal{X}$, seja bastante restrito. Por exemplo, a média, a variância e a covariância são parâmetros usados normalmente para caracterizar variáveis e vectores aleatórios, mas também podem caracterizar processos estocásticos.

Definição 1.2.2 (Primeiros e segundos momentos de um processo estocástico) *Dado o processo* $\mathcal{X} = \{X(t),\ t \in T\}$ *define-se, para quaisquer* $t_1, t_2 \in T$,

- *a função média:* $m_X(t_1) = E[X(t_1)]$;
- *a função de auto-correlação:* $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$;
- *a função de auto-covariância:* $C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$;
- *o coeficiente de correlação:* $\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1,t_2)}{\sqrt{C_X(t_1,t_1)C_X(t_2,t_2)}}$.

Definição 1.2.3 (Processo reais de segunda ordem) *Diz-se que um processo estocástico* $\{X(t),\ t \in T\}$ *é de segunda ordem se, para todo* $t \in T$, $E[X^2(t)] < +\infty$.

Definição 1.2.4 (Processos estacionários de segunda ordem) *Diz-se que um processo estocástico* $\mathcal{X} = \{X(t),\ t \in T\}$ *é estacionário de segunda ordem se as funções* $m_X(t)$ *e* $C_X(t, t+h)$, *com* $h \in T$, *são independentes de* t.

Exemplo 1.2.1 *Consideremos uma variável aleatória* Y *uniformemente distribuída no intervalo (0,1),* $Y \frown U(0,1)$. *Definindo o processo estocástico* $\{X(t),\ t \geq 0\}$, *com* $X(t) = e^Y t$, *para* $t \geq 0$, *tem-se*

- *função densidade de* $X(t)$: $f_{X(t)}(x) = f_Y(\ln(x/t)) \left|\frac{d\ln(x/t)}{dx}\right| = \frac{1}{x}, \quad$ *se* $x \in (t, te)$;
- $m_X(t) = E[e^Y t] = \int_0^1 e^y t \times 1 dy = t(e-1), \quad$ *para* $t \geq 0$;
- $R_X(t, t+s) = E[e^{2Y} \times t(t+s)] = t(t+s)\frac{e^2-1}{2}, \quad$ *para* $s, t \geq 0$.
- $C_X(t, t+s) = t(t+s)\frac{e^2-1}{2} - [t(e-1) \times (t+s)(e-1)] \quad$ *para* $s, t \geq 0$.
- $E(X^2(t)) = R_X(t,t) = t^2\frac{e^2-1}{2}$.
- $Var[X(t)] = C_X(t,t) = t^2\frac{e^2-1}{2} - [t(e-1)]^2$.

Da Definição 1.2.4 concluímos que o processo dado não é estacionário de segunda ordem pois a função média $m_X(t)$ *depende de* t, *sendo no entanto um processo real de segunda ordem.*

Definição 1.2.5 (Processo com incrementos independentes) *Um processo estocástico de tempo contínuo* $\{X(t),\ t \geq 0\}$ *diz-se de incrementos independentes se* $X(0) = 0$ *e, para quaisquer instantes* $t_0 < t_1 < \cdots < t_k$*, as* k *variáveis aleatórias* $X(t_1) - X(t_0), \cdots, X(t_k) - X(t_{k-1})$ *são independentes.*

Desta definição resulta que, para um processo de incrementos independentes, as variáveis $X(t') - X(t)$ e $X(t)$ são independentes quando se toma $0 < t < t'$.

Definição 1.2.6 (Processo com incrementos estacionários) *Um processo estocástico de tempo contínuo* $\{X(t),\ t \geq 0\}$ *diz-se de incrementos estacionários se as variáveis aleatórias* $X(t_2 + h) - X(t_1 + h)$ *e* $X(t_2) - X(t_1)$*, com* t_1 *e* t_2 *quaisquer tal que* $t_i + h \geq 0$*,* $i = 1, 2$*, têm a mesma distribuição.*

Notemos que garantir que $X(t_2+h)-X(t_1+h)$ e $X(t_2)-X(t_1)$ têm a mesma distribuição não significa que estas variáveis são iguais.

Proposição 1.2.1 *Se* $\mathcal{X} = \{X(t),\ t \geq 0\}$ *é um processo de incrementos independentes e estacionários então existe uma constante* σ *não negativa tal que*

$$Var[X(t) - X(s)] = \sigma^2 |t - s|, \quad \forall t, s \geq 0.$$

Demonstração. Vamos designar $f(t) = Var[X(t)]$, a qual satisfaz a equação funcional $f(t_1 + t_2)=f(t_1) + f(t_2)$. De facto, considerando os instantes $0 < t_1 < t_2 < t_1 + t_2$,

- porque $\mathcal{X}$ tem incrementos estacionários, então as variáveis $X(t_2)-X(0)$ e $X(t_1+t_2)-X(t_1)$ são identicamente distribuídas, e portanto, $Var[X(t_1 + t_2) - X(t_1)] = Var[X(t_2)]$;
- porque $\mathcal{X}$ tem incrementos independentes, então as variáveis $X(t_1+t_2)-X(t_1)$ e $X(t_1)$ são independentes; logo $Var[X(t_1+t_2)-X(t_1)+X(t_1)] = Var[X(t_1+t_2)-X(t_1)]+Var[X(t_1)]$.

Consequentemente, $Var[X(t_1+t_2)] = Var[X(t_2)]+Var[X(t_1)]$, ou seja $f(t_1+t_2) = f(t_1)+f(t_2)$. Sabe-se da teoria das equações funcionais que, para uma função $f(t) \geq 0$ que satisfaça a equação funcional acima referida, existe uma constante $c \geq 0$ tal que $f(t) = ct$. A função $f(t) = Var[X(t)]$ está nestas condições. Tomando $c = \sigma^2$ vem $f(t) = \sigma^2 t$ e portanto, para $t > s$, tem-se

$$Var[X(t) - X(s)] = Var[X(t - s) - X(0)] = Var[X(t - s)] = \sigma^2(t - s),$$

como se queria provar.

Exemplo 1.2.2 *Os processos de Poisson, usados em geral na modelação de ocorrências no tempo a uma taxa média constante μ por unidade de tempo, são um tipo de processos estocásticos com espaço de parâmetro contínuo e espaço de estados discreto que possui incrementos independentes e estacionários. Trata-se de processos muito importantes, não só como modelos para vários fenómenos bem como base a partir dos quais vários processos estocásticos podem ser construídos. Em termos matemáticos, diz-se que um processo estocástico de valores inteiros $\{N(t),\ t \geq t\}$ é um processo de Poisson com intensidade μ se for um processo de contagem do número de acontecimentos em $[0, t]$ satisfazendo as seguintes condições:*

1. *o número de acontecimentos ocorridos em intervalos disjuntos são independentes (ou seja, o processo é de incrementos independentes)*
2. *o número de acontecimentos ocorridos no intervalo $[t, t+h]$ depende só de h e é independente de t (ou seja, o processo é de incrementos estacionários)*
3. *a probabilidade de ocorrência de pelo menos um acontecimento no intervalo de duração dt é $\mu dt + o(dt)$, com $dt \to 0$ e $\mu > 0$;*
4. *a probabilidade de ocorrência de dois ou mais acontecimentos no intervalo de duração dt é um infinitésimo de ordem inferior a dt, pelo que não há possibilidade de ocorrerem dois ou mais acontecimentos simultaneamente.*

Definição 1.2.7 (Processo de Markov) *Um processo estocástico $\{X(t),\ t \in T\}$ diz-se de Markov se satisfaz a propriedade markoviana dada por*

$$P[X(t_n) \leq x_n \,|X(t), t \leq t_{n-1}] = P[X(t_n) \leq x_n \,|X(t_{n-1})]$$

para $t_{n-1} < t_n$.

Por outras palavras, a probabilidade de assumir um comportamento futuro, quando o estado presente do processo é conhecido, não é alterada pelo conhecimento adicional do seu passado. Assim, num processo de Markov, o futuro do processo é independente do passado. Sempre que o espaço de estados de um processo de Markov for discreto diremos que estamos perante uma cadeia de Markov; se o o espaço de estados e do parâmetro for contínuo, e o processo satisfazer certas condições adicionais, diremos que o processo de Markov é um processo de difusão.

Exemplo 1.2.3 *Imaginemos uma partícula que se move em saltos discretos de tamanho unitário. Inicialmente a partícula está na origem. Assumindo que os saltos unitários, Z_n, dados em cada instante $n = 1, 2, \cdots$, são independentes e identicamente distribuídos com $P(Z_n = 1) = P(Z_n = -1) = \frac{1}{2}$, resulta que a posição X_n da partícula no instante n será dada por*

$$X_n = X_{n-1} + Z_n.$$

O processo $\{X_n,\ n \in N\}$ assim obtido é uma cadeia de Markov conhecido por passeio aleatório simples.

Definição 1.2.8 (Processo gaussiano) *Um processo estocástico $\{X(t),\ t \in T\}$ é um processo gaussiano se o vector aleatório $(X(t_1), \cdots, X(t_n))$, para qualquer n natural, tiver uma distribuição multinormal.*

Tal significa que, em processos gaussianos, todos os seus vectores de dimensão finita são gaussianos, isto é, para $n \in N$ e $\forall t_1, ..., t_n \in T$, $\mathbf{X} = (X(t_1), \cdots, X(t_n))$ é um vector aleatório gaussiano. Recordamos também que se $\mathbf{X}$ é um vector aleatório com distribuição $N(\mu; \mathbf{\Sigma})$ então qualquer transformação afim de $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$, tem distribuição gaussiana dada por $N(\mathbf{A}\mu; \mathbf{A\Sigma A'})$, onde A é uma matriz de constantes reais e $\mathbf{\Sigma}$ é a matriz de covariâncias do vector $\mathbf{X}$.

Definição 1.2.9 (Processo estocástico em tempo homogéneo) *Um processo estocástico $\{X(t),\ t \in T\}$ é um processo em tempo homogéneo se a sua função densidade de transição $p(x, x_0, t, t_0)$ depende unicamente de $(x, x_0, t - t_0)$*

1.3 Objectivos e organização da dissertação

A presente dissertação tem como principal objectivo estudar um conjunto de diferentes tipos de processos estocásticos e mostrar uma aplicação da Teoria dos Processos Estocásticos no campo dos Seguros. Concretamente, apresentamos uma abordagem detalhada de vários processos de difusão e estudamos uma aplicação seguindo o trabalho de Jang [7].

Basicamente, aquele autor usa o processo de difusão por saltos para modelar o montante de indemnização agregada acumulada, quando sujeito a uma taxa de juro estocástica, e deriva uma expressão explícita da transformada de Laplace conjunta da distribuição de um processo de difusão por salto e do seu processo integrado, assumindo que o tamanho dos saltos segue uma mistura de duas distribuições exponenciais. Com base nessa transformada de Laplace, consegue então derivar os momentos da quantidade de indemnização agregado acumulado até ao instante t.

Nesta dissertação discutimos essa aplicação e estendemos a análise apresentada por Jang investigando a influência dos parâmetros da mistura e das duas distribuições exponenciais nos valores da esperança e da variância do montante de indemnização agregada acumulada.

A dissertação está dividida em mais três capítulos para além deste.

- Neste primeiro capítulo começámos por apresentar uma breve introdução aos processos estocásticos focando propriedades importantes que os caracterizam.

- No Capítulo 2 abordaremos vários processos de difusão, definindo-os e caracterizando-os. Estudaremos alguns dos seus processos derivados mostrando e provando algumas propriedades relevantes.

- No terceiro capítulo destacaremos a aplicação proposta por Jang, [7], e providenciaremos vários exemplos numéricos para a média e a variância dos prémios agregados acumulados.

- No Capítulo 4 concluiremos a dissertação com uma descrição sumária do trabalho realizado.

Capítulo 2

Processos de difusão

2.1 Processo de Wiener

O processo de Wiener, também conhecido por movimento Browniano, tem um papel fundamental na Teoria dos Processos Estocásticos. É aplicado em variadíssimas áreas de estudo tais como Finanças e com vasto interesse nos Seguros [7].
O processo de Wiener foi descoberto em 1827 pelo botânico inglês Robert Brown. Brown verificou que uma partícula submersa num líquido com gás apresentava movimentos irregulares devido ao impacto das moléculas desse líquido sobre esta partícula, movimentos esses que só seriam vistos ao microscópio [11]. O movimento dessa partícula é caracterizado pelo movimento Browniano.

Uma outra interpretação física para o movimento Browniano seria fixarmos uma unidade de tempo e, a cada unidade desse tempo, lançar uma moeda ao ar e fazer a partícula mover uma unidade para direita ou para a esquerda se sair cara ou coroa, respectivamente, resultando assim num passeio aleatório. Acelerando esse passeio aleatório obtém-se o movimento Browniano. De que modo aceleramos esse passeio aleatório? Tornando a unidade de tempo por deslocamento e a unidade de deslocamento suficientemente pequenas, como a seguir ilustramos.

Seja Y a variável aleatória que representa o número de transições que a partícula faz para a direita após n deslocamentos. Nestas circunstâncias, Y tem uma distribuição binomial de parâmetros n e p, pois a variável Y resulta da soma de n variáveis com distribuição de Bernoulli em que cada variável toma valores 0 ou 1 com probabilidade $1-p$ e p, respectivamente. Concretamente,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

com

$$S_i = \begin{cases} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{cases}$$

Podemos dizer que a posição da partícula, após $n\delta$ unidades de tempo, é dada por $X(n\delta) = (2Y - n)\varepsilon$, sendo ε a distância percorrida em cada δ unidades de tempo. Assim, para $p = 1/2$, teremos $E[X(n\delta)] = E[(2Y - n)\varepsilon] = 0$ e $Var[X(n\delta)] = n\varepsilon^2$. Além disso, para n suficientemente grande, pelo Teorema Limite Central, resultará que

$$X(n\delta) = (2Y - n)\varepsilon \ \approx \ N(0, n\varepsilon^2).$$

Generalizando, a posição da partícula após t unidades de tempo será dada por $X(t) = (2Y - t/\delta)\varepsilon$, mantendo-se a aproximação à distribuição normal

$$X(t) \ \approx \ N(0, \varepsilon^2 \frac{t}{\delta}),$$

com δ suficientemente próximo de zero (já que tomámos $n\delta = t$ e n suficientemente grande).

Para simplificar, consideremos que existe $\sigma > 0$ tal que $\varepsilon = \sigma\sqrt{\delta}$. Assim, $t = \varepsilon^2/\delta$. Fazendo δ decrescer para zero virá, implicitamente, que ε também decrescerá para zero (de modo a $\varepsilon^2/\delta = t$) e, por outro lado, o processo $\{X(t),\ t > 0\}$ resultará, no limite, num processo $\{W(t),\ t > 0\}$ com espaço de estados contínuo e tal que

$$W(t) = \lim_{\delta \downarrow 0} X(t) \ \frown \ N(0, \sigma^2 t).$$

Este resultado limite de um passeio aleatório simples é uma especial característica do movimento Browniano ou processo de Wiener.

Definição 2.1.1 (Processo de Wiener) *Um processo estocástico $\{W(t),\ t > 0\}$ é chamado movimento Browniano ou processo de Wiener se:*

1. $W(0) = 0$
2. $\{W(t),\ t > 0\}$ *tem incrementos independentes e estacionários*
3. $W(t)$ *tem distribuição normal de média nula e variância* $\sigma^2 t$*, para todo* $t > 0$.

Figura 2.1: Representação das deslocações de uma partícula em movimento Browniano projectadas no plano.[Imagem extraída de Cite:pt.wikipedia.org/wiki/Movimento_browniano]

Ao processo definido por $B(t) = \frac{W(t)}{\sigma}$ dá-se o nome de movimento Browniano padrão (ou standard). $B(t)$ segue uma distribuição normal com parâmetros $E[B(t)] = 0$ e $Var[B(t)] = \frac{\sigma^2 t}{\sigma^2} = t$.

Ao processo definido por $W_1(t) = W(t) + c$, com c constante real, onde c é o valor de $W_1(0)$, dá-se o nome de movimento Browniano iniciado em c . $W_1(t)$ tem uma distribuição normal de parâmetros $E[W_1(t)] = c$ e $Var[W_1(t)] = \sigma^2 t$, $\forall t \geq 0$. Uma generalização deste processo é considerar $W_2(t) = W(t) + C$, com C variável aleatória independente de $W(t)$, $\forall t$; assim, $E[W_2(t)] = E[C]$ e $Var[W_2(t)] = \sigma^2 t + Var[C]$.

Propriedade 2.1.1 *Seja $\mathcal{W} = \{W(t),\ t \geq 0\}$ um processo de Wiener. Então,*

1. *$\mathcal{W}$ é um processo gaussiano e Markoviano;*

2. *a função densidade conjunta de qualquer vector aleatório de dimensão k do processo $\mathcal{W}$, $(W(t_1), \cdots, W(t_k))$, é dada por*

$$f_{(W(t_1),\cdots,W(t_k))}(w_1, \cdots, w_k; t_1, \cdots, t_k) = g(w_1; t_1) \prod_{j=2}^{k} g(w_j - w_{j-1}; t_j - t_{j-1})$$

onde

$$g(w; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left\{-\frac{w^2}{2\sigma^2 t}\right\}, \quad \forall w \in \Re;$$

3. *a função de auto-covariância e de auto-autocorrelação de $\mathcal{W}$ coincidem e são dadas por*

$$C_W(t, s) \equiv R_W(s, t) = \sigma^2 \min(t, s) \ , \quad \forall s, t \geq 0,$$

donde o processo de Wiener não é estacionário de segunda ordem.

Uma segunda definição equivalente para processo de Wiener é a que se segue.

Definição 2.1.2 (Processo de Wiener) *Um processo estocástico em tempo contínuo e espaço de estados contínuo $\mathcal{W} = \{W(t),\ t \geq 0\}$ é um movimento Browniano se*

1. *$W(0) = 0$;*

2. $E[W(t)] = 0$*;*

3. $\mathcal{W}$ *é um processo gaussiano;*

4. $C_W(s,t) = \sigma^2 \min(s,t), \quad \forall s,t \geq 0$*, onde* σ *é uma constante.*

Esta definição tem a vantagem de ser baseada em condições de serem mais fáceis de trabalhar na prática. Torna a averiguação de um dado processo ser um movimento Browniano ou não mais simples do que se trabalharmos com a Definição 2.1.1.

Exemplo 2.1.1 *Verifiquemos se* $\mathcal{X} = \{X(t),\ t \geq 0\}$*, com* $X(t) = tW(1/t)$ *e* $X(0) = 0$*, é um processo de Wiener, onde* $\{W(t),\ t \geq 0\}$ *é um movimento Browniano.*
Recorreremos à Definição 2.1.2.
$X(0) = 0$*, pelo que a primeira condição está verificada.*
Sendo $E[W(t)] = 0,\ \forall t \geq 0$*, vem*

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E[tW(1/t)] = tE[W(1/t)] \\ &= t \times 0 = 0\ , \end{aligned}$$

pelo que a segunda condição está verificada. Também a quarta condição é válida:

$$\begin{aligned} C_X(s,t) &= E[X(s)X(t)] - E[X(s)]E[X(t)] = E[sW(1/s)tW(1/t)] \\ &= s\ t\ C_W[1/s, 1/t] = st\sigma^2 \min(1/s, 1/t) \\ &= \sigma^2 \min(t,s). \end{aligned}$$

Mais ainda, o processo $\mathcal{V} = \{W(1/t),\ t \geq 0\}$ *é gaussiano porque resulta do processo de Wiener por uma transformação no parâmetro, sendo que* $\mathcal{V}$ *é um sub-processo de* $\mathcal{W}$ *(*$\mathcal{V} \equiv \{W(t),\ 0 < t < 1\}$*).*
$\mathcal{X}$ *é um processo gaussiano pois qualquer vector* $\mathbf{X} = (X(t_1), \cdots, X(t_n))$ *de* $\mathcal{X}$ *é uma transformação afim de um vector gaussiano* $\mathbf{V} = (W(1/t_1), \cdots, W(1/t_n))$ *de* $\mathcal{V}$ *dada por* $\mathbf{X} = \mathbf{AV}$ *onde* A *é uma matriz diagonal em que os* n *elementos da diagonal são* $t_1, \cdots, t_n$*.*
Observemos que $X(t) \sim N(0, t\sigma^2)$*.*

Exemplo 2.1.2 *Consideremos agora o processo estocástico* $\mathcal{X} = \{X(t),\ t \geq 0\}$*, onde* $X(t) = B(t)|B(t) \geq 0$*, para* $t \geq 0$*, onde* $\{B(t),\ t \geq 0\}$ *é o movimento Browniano padrão.*
$\mathcal{X}$ *não é um processo de Weiner já que não é um processo gaussiano. De facto, basta verificar*

que a função densidade de probabilidade de $X(t)$, para qualquer $t \geq 0$, não é a função densidade de uma normal. Como $B(t)$ segue uma distribuição normal de média nula e variância t, então $P[B(t) \geq 0] = 1/2$ e, portanto,

$$\begin{aligned} f_{X(t)}(x) &= \frac{f_{B(t)}(x)}{P[B(t) \geq 0]} \\ &= \frac{f_{B(t)}(x)}{1/2} = 2f_{B(t)}(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right), \qquad \text{para } x \geq 0. \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.3 *Consideremos o processo estocástico $\mathcal{X} = \{X(t),\ t \geq 0\}$, onde $X(t) = B^2(t)$, $\forall t \geq 0$, e $\{B(t),\ t \geq 0\}$ um movimento Browniano padrão. $\mathcal{X}$ não é um processo de Weiner pois $E[X(t)]$=$E[B^2(t)]$=$Var[B(t)] = t$ (falha a segunda condição da Definição 2.1.2.)*

Exemplo 2.1.4 *Para o processo estocástico $\mathcal{X} = \{X(t),\ t \geq 0\}$, onde $X(t)$=$B(t) + B(t^2)$, com $\{B(t),\ t \geq 0\}$ movimento Browniano padrão, é fácil verificar que $\mathcal{X}$ não é um movimento Browniano.*

Na realidade, tendo em conta as propriedades do valor médio, resulta que

$$E[X(t)] = E[B(t)] + E[B(t^2)] = 0$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} C_X(t, t+s) &= E[(B(t) + B(t^2))((B(t+s) + B((t+s)^2))] - 0 \\ &= E[B(t)B(t+s)] + E[B(t)B((t+s)^2)] + E[B(t^2)B(t+s)] + E[B(t^2)B((t+s)^2)] \\ &= \min(t, t+s) + \min(t, (t+s)^2) + \min(t^2, (t+s)) + \min(t^2, (t+s)^2) \\ &= t + \min(t, (t+s)^2) + \min(t^2, (t+s)) + t^2 \\ &= 2t + t^2 + \min(t^2, (t+s)) \end{aligned}$$

Pelo que a quarta condição da Definição 2.1.1 não se verifica e, portanto, o processo dado $\mathcal{X} = \{X(t),\ t \geq 0\}$ não é um processo de Wiener.

Exemplo 2.1.5 *Seja $\mathcal{X} = \{X(t),\ t \geq 0\}$ um processo gaussiano com $X(0)$=0, $E[X(t)]$=μt e $R_X(t, t+r)$=$2t + \mu^2 t(t+r)$, para todo $t, r \geq 0$. Nestas condições, o processo estocástico*

$\mathcal{Y} = \{Y(t),\ t \geq 0\}$, onde $Y(t) = X(t) - \mu t$, é um movimento Browniano.

Observemos que

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= E[X(t)] - \mu t = \mu t - \mu t \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} C_Y(t, t+r) &= E[(X(t) - \mu t)(X(t+r) - \mu(t+r))] \\ &= E[(X(t)X(t+r)] - \mu(t+r)E[X(t)] - \mu t E[X(t+r)] + \mu t \mu(t+r) \\ &= R_X(t, t+r) - \mu^2 t^2 - \mu^2 tr - \mu^2 t^2 - \mu^2 tr + \mu^2 t^2 + \mu^2 tr \\ &= 2t + \mu^2 t(t+r) - \mu^2 t^2 - \mu^2 tr - \mu^2 t^2 - \mu^2 tr + \mu^2 t^2 + \mu^2 tr \\ &= 2t = 2\min(t, t+r)\ , \end{aligned}$$

pelo que a quarta condição da Definição 2.1.1 é verificada com $\sigma^2 = 2$.

$Y(0) = 0$ e $Y(t)$=$X(t) - \mu t = AX(t) + B$ com A matriz identidade e B matriz diagonal em que os n elementos da diagonal são μt. É uma transformação linear de um processo Gaussiano, logo $Y(t)$ é Gaussiano de parâmetros μt e $\sigma^2 X$).

2.2 Processos de Difusão

Definição 2.2.1 (Processo de Difusão) *Um processo estocástico $\{X(t),\ t \geq 0\}$, markoviano em tempo contínuo e espaço de estados contínuo em $[a, b]$[1], é um processo de difusão se*

1. $\lim_{\xi \to 0^+} \frac{1}{\xi} P\left[|X(t+\xi) - X(t)| > \delta \,|X(t) = x\right] = 0$, *para todo $\delta > 0$, $x \in (a, b)$;*

2. *a média e a variância infinitesimal do processo, definidas por*

$$m(x;t) = \lim_{\xi \to 0^+} \frac{1}{\xi} E\left[X(t+\xi) - X(t) \;\middle|\; X(t) = x\right]$$

e

$$v(x;t) = \lim_{\xi \to 0^+} \frac{1}{\xi} E\left[(X(t+\xi) - X(t))^2 \;\middle|\; X(t) = x\right]\ ,$$

respectivamente, são funções contínuas de x e de t.

[1]O espaço de estados do processo pode ser qualquer intervalo da forma $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ ou (a, b).

Proposição 2.2.1 *O processo de Wiener é um processo de difusão.*

Demonstração. Seja $\mathcal{W} = \{W(t),\ t \geq 0\}$ um processo de Wiener. Então, pela Definição 2.1.1 alínea 3, resulta evidente que $\mathcal{W}$ é um processo com espaço de estados contínuo, sendo contínuo no tempo já que T=$[0, +\infty[$. Pela Propriedade 2.1.1, $\mathcal{W}$ é Markoviano.

Resta provar que o processo de Wiener satisfaz as condições 1 e 2 da Definição 2.2.1. Comecemos por verificar a primeira condição. Atendendo a que no processo de Wiener os incrementos são independentes, $W(0) = 0$, e $W(t+\xi) - W(t)$ segue uma distribuição $N(0, \sigma^2\xi)$, resulta que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\xi \to 0^+} \frac{1}{\xi} P\left[|W(t+\xi) - W(t)| > \delta \;\middle|\; W(t) = w\right] = \\
&\quad = \lim_{\xi \to 0^+} \frac{1}{\xi} P\left[|W(t+\xi) - W(t)| > \delta \;\middle|\; W(t) - W(0) = w\right] \\
&\quad = \lim_{\xi \to 0^+} \frac{1}{\xi} P\left[|W(t+\xi) - W(t)| > \delta\right] \\
&\quad = \lim_{\xi \to 0^+} \frac{1}{\xi} P\left[\left|\frac{W(t+\xi) - W(t)}{\sigma\sqrt{\xi}}\right| > \frac{\delta}{\sigma\sqrt{\xi}}\right] = \lim_{\xi \to 0^+} \frac{1}{\xi}\left(2 - 2\phi\left(\frac{\delta}{\sigma\sqrt{\xi}}\right)\right).
\end{aligned}$$

onde ϕ denota a função de distribuição da distribuição $N(0,1)$. Sabe-se, da Teoria das Probabilidades, que $\phi(x)$ é diferenciável tal que a sua derivada coincide com a função densidade da distribuição; logo $\phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Assim, aplicando a Regra de L´Hôpital no levantamento das indeterminações,

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \to 0^+} \frac{1}{\xi}\left(2 - 2\phi\left(\frac{\delta}{\sigma\sqrt{\xi}}\right)\right) &= \lim_{\xi \to 0^+} 2\frac{\delta^2}{\sigma^2\xi}\left(1 - \phi\left(\frac{\delta}{\sigma\sqrt{\xi}}\right)\right)\frac{\sigma^2}{\delta^2} \\
&= \frac{2\sigma^2}{\delta^2} \lim_{x \to +\infty} x^2(1 - \phi(x)) = \frac{2\sigma^2}{\delta^2} \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \phi(x)}{x^{-2}} \\
&= \frac{2\sigma^2}{\delta^2} \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2}}{-2x^{-3}} \\
&= \frac{\sigma^2}{\delta^2\sqrt{\pi}} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^{x^2/2}} = 0\ ,
\end{aligned}$$

como queríamos provar.

Para verificar a validade da segunda condição teremos que calcular a média e a variância infinitesimal do processo $\{W(t),\ t \geq 0\}$. Novamente, tendo em conta que os incrementos $W(t+\xi) - W(t)$

do processo são independentes e seguem uma distribuição $N(0, \sigma^2\xi)$, resulta

$$E\left[W(t+\xi) - W(t) \mid W(t) = x\right] \quad = \quad E\left[W(t+\xi) - W(t)\right] = 0$$

e

$$E\left[(W(t+\xi) - W(t))^2 \mid W(t) = x\right] \quad = \quad E\left[(W(t+\xi) - W(t))^2\right] = \sigma^2\xi$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} m(x;t) &= \lim_{\xi \to 0^+} \frac{1}{\xi} E\left[W(t+\xi) - W(t) \mid W(t) = x\right] = \lim_{\xi \to 0^+} 0 = 0 \\ v(x;t) &= \lim_{\xi \to 0^+} \frac{1}{\xi} E\left[(W(t+\xi) - W(t))^2 \mid W(t) = x\right] = \lim_{\xi \to 0^+} \sigma^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

Consequentemente, os parâmetros infinitesimais do processo de Wiener são funções constantes e, portanto, são funções contínuas de x e de t.
Do exposto concluímos que o processo de Wiener $\{W(t),\ t \geq 0\}$ é um processo de difusão.

Proposição 2.2.2 *Seja $\mathcal{X} = \{X(t),\ t \geq 0\}$ um processo de difusão em tempo homogéneo com $m(x;t) = m(x)$ e $v(x;t) = v(x)$ e espaço de estados $[a,b]$ e $\mathcal{Y} = \{Y(t),\ t \geq 0\}$, com $Y(t) = g(X(t))$, $t \geq 0$, onde g é uma função estritamente monótona em $[a,b]$ e $g \in \mathcal{C}^2(]a,b[)$*[2]*, então $\mathcal{Y}$ é um processo de difusão com parâmetros infinitesimais dados por:*

$$m_Y(y) = m_X(x)g'(x) + \frac{1}{2}v_X(x)g''(x) \tag{2.1}$$

$$v_Y(y) = v_X(x)[g'(x)]^2 \tag{2.2}$$

onde $x = g^{-1}(y)$.

Observemos que a função g não deve ser dependente do parâmetro temporal, t do processo.

2.2.1 Processo de Wiener com impulso

Definição 2.2.2 (Processo de Wiener com impulso) *Chamamos processo de Wiener com impulso*[3]*, ou ainda, movimento Browniano com impulso ao processo em tempo homogéneo cujos*

[2] Diz que uma função f pertence à classe $\mathfrak{C}^k(I)$ se as derivadas sucessivas de f ate à ordem k existem e são contínuas em I

[3] Da tradução, em inglês, de *Wiener process with drift*

parâmetros infinitesimais são constantes, $m(x;t) = \mu$ *e* $v(x;t) = \sigma^2$.
Nestas condições, diremos que μ *é o coeficiente (ou parâmetro) de impulso e* σ^2 *é o coeficiente (ou parâmetro) de difusão.*

Um exemplo concreto de um processo de Wiener com impulso, resulta da transformação afim de um movimento Browniano padrão. Na realidade, prova-se que para o processo $\{Y(t),\ t \geq 0\}$, com $Y(t) = \sigma B(t) + \mu t$, onde $\{B(t),\ t \geq 0\}$ é um movimento Browniano padrão e μ e $\sigma > 0$ são constantes reais, os parâmetros infinitesimais do processo dados de acordo com a Definição 2.2.2. Observemos que, neste caso, poderíamos escrever que $Y(t) = g(X(t))$ com $g(x,t) = \sigma(x) + \mu t$, a qual não é função apenas de t, pelo que não poderíamos aplicar as fórmulas (2.1) e (2.2).

Observemos também que $Y(t) = \sigma B(t) + \mu t$ é uma transformação afim da variável $B(t)$ com distribuição $N(0,t)$, logo $Y(t)$ continua sendo uma variável aleatória com distribuição normal $N(\mu t, \sigma^2 t)$.

Proposição 2.2.3 *O processo de Wiener com impulso* $\mathcal{Y} = \{Y(t),\ t \geq 0\}$*, dado por* $Y(t) = \sigma B(t) + \mu t$*, onde é* $\mathbf{B} = \{B(t),\ t \geq 0\}$ *é um movimento Browniano padrão, é um processo gaussiano com incrementos independentes e estacionários e tem a mesma função de auto-covariância do processo de Wiener* $\{\sigma B(t),\ t \geq 0\}$.

Demonstração. O processo $\mathcal{Y}$ é gaussiano porque qualquer vector $\mathbf{Y} = (Y(t_1), \cdots, Y(t_1))$ de $\mathcal{Y}$ se pode escreve por meio de uma transformação linear de vectores do processo gaussiano $\mathbf{B}$ do seguinte modo: $\mathbf{Y} = \mathbf{AB} + \mathbf{C}$, onde $\mathbf{A}$ é a matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal são constantes e iguais a σ e e $\mathbf{C} = [\mu t \cdots \mu t]^T$. Consequentemente, $\mathbf{Y}$ é gaussiano.
Além disso, para qualquer $t, s \geq 0$,

$$Y(t+s) - Y(t) = \sigma(B(t+s) - B(t)) + \mu s$$

pelo que os incrementos do processo $\mathcal{Y}$ coincidem, a menos de uma constante, com os incrementos do movimento Browniano $\{\sigma B(t),\ t \geq 0\}$. Como os incrementos de um movimento Browniano são independentes e estacionários, assim também os incrementos do processo $\mathcal{Y}$ o serão. Por outro lado, como $Y(0) = \sigma B(0) + \mu \times 0 = 0$ então:

$$\begin{aligned} E[Y(t+s)Y(t)] &= E\left[(Y(t+s) - Y(t) + Y(t))Y(t)\right] = E[Y(t+s) - Y(t)]E[Y(t)] + E[Y^2(t)] \\ &= E[Y(s)]E[Y(t)] + E[Y^2(t)] = \mu s \mu t + \sigma^2 t + \mu^2 t^2 \end{aligned}$$

e, por conseguinte, a função de auto-covariância do processo $\mathcal{Y}$ será dada por:

$$\begin{aligned} C_Y(t,t+s) &= E[Y(t+s)Y(t)] - E[Y(t+s)]E[Y(t)] = \mu^2 st + \sigma^2 t + \mu^2 t^2 - \mu(t+s)\mu t \\ &= \sigma^2 t = C_{\sigma B}(t,t+s), \quad \text{para } t,s \geq 0. \end{aligned}$$

2.2.2 Movimento Browniano Geométrico

Definição 2.2.3 (Movimento Browniano Geométrico) *Chamamos movimento Browniano geométrico ao processo de difusão cujos parâmetros infinitesimais são dados por*

$$m(x;t) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)x \qquad e \qquad v(x;t) = \sigma^2 x^2.$$

Exemplo 2.2.1 *Seja $\{X(t),\ t \geq 0\}$ um processo de Wiener com coeficiente de impulso μ e coeficiente de difusão σ^2. Consideremos o processo $\{Y(t),\ t \geq 0\}$, com $Y(t) = e^{X(t)}$, o qual é usado em Matemática Financeira na modelação de preços de acções, taxas de juros e outras variáveis financeiras e económicas para certos stocks. O processo assim obtido, através da exponencial de um movimento Browniano com impulso, corresponde a um movimento Browniano geométrico. De facto, nessas circunstâncias, podemos escrever $Y = g(X(t))$, tomando $g(x) = e^x$, função que não depende de t, é estritamente crescente e pertencente à classe $\mathfrak{C}^2(\mathbb{R})$; logo, resulta válida a aplicação das fórmulas (2.1) e (2.2) para a determinação dos parâmetros infinitesimais do processo $\{Y(t),\ t \geq 0\}$. Vem,*

$$\begin{aligned} m_Y(y) &= m(x)g'(x) + \frac{1}{2}v(x)g''(x) = \mu e^x + \frac{1}{2}\sigma^2 e^x \\ &= \mu y + \frac{1}{2}\sigma^2 y = y\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \qquad (2.3) \\ v_Y(y) &= v(x)[g'(x)]^2 = \sigma^2 (e^x)^2 \\ &= \sigma^2 y^2 \qquad (2.4) \end{aligned}$$

Assim, as condições da Definição 2.2.3 estão verificadas e, por conseguinte, $\{Y(t),\ t \geq 0\}$ é um movimento Browniano Geométrico.

Proposição 2.2.4 *O processo $\{Y(t),\ t \geq 0\}$, com $Y(t)$=$e^{X(t)}$ e $\{X(t),\ t \geq 0\}$ movimento Browniano com impulso, não é um processo gaussiano.*

Demonstração. *Para $\ln Y(t) = X(t)$ a função densidade de $Y(t)$ no ponto $y > 0$ é dada por:*

$$f_Y(y) \quad = \quad f_X(\ln y) \times \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}y} e^{-\frac{(\ln y - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}} ,$$

que é a função densidade de uma distribuição lognormal de parâmetros μt e $\sigma^2 t$.

Podemos generalizar a definição do movimento Browniano geométrico.

Definição 2.2.4 *A um processo estocástico $\{Y(t), t \geq 0\}$, com $Y(t){=}Y(0)e^{X(t)}$ damos o nome de movimento Browniano geométrico em que Y(0) é uma constante positiva e $\{X(t),\ t \geq 0\}$ é um processo de Wiener com impulso.*

Propriedade 2.2.1 *A função densidade de transição do movimento Browniano geométrico, definida por*

$$\begin{aligned} p(y, y_0; t, t_0) \quad &= \quad f_{Y(t)\ |Y(t_0)=y_0}(y) \\ &= \quad \lim_{\Delta y \to 0^+} \frac{P\left(y < Y(t) \leq x + \Delta y \mid Y(t_0) = y_0\right)}{\Delta y} \end{aligned}$$

satisfaz a chamada equação de avanço de Kolmogorov dada por

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}[m_Y(y)p] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[v_Y(y)p] \quad = \quad 0 \tag{2.5}$$

Tendo em conta (2.3) e (2.4), temos que (2.5) corresponde à equação diferencial parcial

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial}{\partial y}(yp) - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(y^2 p) \quad = \quad 0\ .$$

No caso particular de $t_0 = 0$ prova-se que a solução desta equação diferencial parcial, que satisfaz a condição inicial

$$\lim_{t \to 0^+} p(y, y_0; t, 0) = \sigma(y - y_0)\ ,$$

e a função densidade de transição $p(y, y_0; t, 0)$ é dada por

$$p(y, y_0; t, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}y} \exp\left(-\frac{(\ln\frac{y}{y_0} - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right)\ ,$$

para $y, y_0 > 0$ e $t > 0$.

Proposição 2.2.5 *O movimento Browniano geométrico é um processo Markoviano cuja função densidade de transição $p(y, y_0; t, t_0)$ é homogénea no tempo, ou seja, $p(y, y_0; t, t_0)$ é função de y, y_0 e da amplitude de tempo $t - t_0$.*

Demonstração. Tomemos o caso geral do movimento Browniano geométrico ser dado pelo processo $\{Y(t), t \geq 0\}$, com $Y(t)$=$Y(0)e^{X(t)}$ onde Y(0) é uma constante positiva e $\{X(t),\ t \geq 0\}$ é um processo de Wiener com impulso. Comecemos por mostrar que $\{Y(t), t \geq 0\}$ é Markoviano. De facto, fazendo $x_i = \ln \frac{y_i}{y_0}$, vem

$$P[Y(t_{k+1}) \leq y_{k+1} \mid Y(t_1) = y_1, Y(t_2) = y_2, \cdots, Y(t_k) = y_k] =$$

$$\begin{aligned}
&= P[Y(0)e^{X(t_{k+1})} \leq y_{k+1} \mid e^{X(t_1)} = y_1, e^{X(t_2)} = y_2, \cdots, e^{X(t_k)} = y_k] \\
&= P[X(t_{k+1}) \leq \ln \frac{y_{k+1}}{y_0} \mid X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_k) = x_k] \\
&= P[X(t_{k+1}) \leq x_{k+1} \mid X(t_1) = x_1, X(t_2) - X(t_1) = x_2 - x_1, \cdots, X(t_k) - X(t_{k-1}) = x_k - x_{k-1}] \\
&= P[X(t_{k+1}) - X(t_k) \leq x_{k+1} - X(t_k) \mid X(t_1) = x_1, \cdots, X(t_k) - X(t_{k-1}) = x_k - x_{k-1}] \\
&= P[X(t_{k+1}) - X(t_k) \leq x_{k+1} - x_k \mid X(t_k) = x_k] \\
&= P[X(t_{k+1}) \leq x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k] \\
&= P[Y(t_{k+1}) \leq y_{k+1} \mid Y(t_k) = y_k]\ .
\end{aligned}$$

Logo, o movimento Browniano geométrico é um processo Markoviano.
Para verificar que $\{Y(t),\ t \geq 0\}$ é homogéneo no tempo basta atender a que o processo de Wiener com impulso $\{X(t),\ t \geq 0\}$ é de incrementos independentes e estacionários. Temos:

$$Y(t) = Y(0)e^{X(t)} = Y(0)e^{X(t)-X(t_0)+X(t_0)} = Y(0)e^{X(t_0)}e^{X(t)-X(t_0)} = Y(t_0)e^{X(t)-X(t_0)}\ .$$

Por conseguinte, as seguintes igualdades em distribuição são observadas:

$$\begin{aligned}
Y(t)\left.\right|_{Y(t_0)=y_0} &= y_0 e^{X(t)-X(t_0)}\Big|_{Y(0)e^{X(t_0)}=y_0} \\
&= y_0 e^{X(t)-X(t_0)} \\
&= y_0 e^{X(t-t_0)}
\end{aligned}$$

donde

$$p(y, y_0; t, t_0) \;=\; f_{Y(t)\ |Y(t_0)=y_0}(y) = f_{y_0 e^{X(t-t_0)}}(y) = p(y, y_0; t - t_0).$$

Proposição 2.2.6 *O movimento Browniano geométrico não é um processo com incrementos independentes e estacionários.*

Demonstração. Partindo dos pressupostos assumidos na demonstração da Proposição 2.2.5 e considerando duas variáveis aleatórias $Z_1 = Y(t+s) - Y(t) = Y(0)[e^{X(t+s)} - e^{X(t)}]$ e $Z_2 = Y(t) - Y(0) = Y(0)[e^{X(t)} - 1]$ podemos verificar que os dois incrementos do processo $\{Y(t),\ t \geq 0\}$ não tem a mesma distribuição, para todo o $t, s > 0$. Para tal basta, por exemplo, encontrar dois instantes t e s, tal que $E(Z_1) \neq E(Z_2)$. Uma vez que $X(t)$ tem distribuição $N(\mu t, \sigma^2 t^2)$, a sua função geradora de momentos será dada por:

$$M_{X(t)}(a) = \exp\left(\mu t a + \frac{1}{2}\sigma^2 t a^2\right) \tag{2.6}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} E(Z_1) &= E\left[Y(0)\left(e^{X(t+s)} - e^{X(t)}\right)\right] = Y(0)\left[M_{X(t+s)}(1) - M_{X(t)}(1)\right] \\ &= Y(0)\left[\exp\left(\mu(t+s) + \frac{1}{2}\sigma^2(t+s)\right) - \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)\right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E(Z_2) &= E\left[Y(0)\left(e^{X(t)} - 1\right)\right] = Y(0)\left[M_{X(t)}(1) - 1\right] \\ &= Y(0)\left[\exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) - 1\right] \end{aligned}$$

Por exemplo, para $t = 1$ e $s = 2$, no caso particular de $\mu = \sigma = 1$, temos

$$\begin{aligned} E(Z_1) &= Y(0)\left[\exp\left(2\mu + \sigma^2\right) - \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right] \\ &\neq E(Z_2) = Y(0)\left[\exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) - 1\right]. \end{aligned}$$

Além disso, as variáveis Z_1 e Z_2 não são independentes, já que estão correlacionadas:

$$\begin{aligned} &Cov[Z_1, Z_2] = E[(Y(t+s) - Y(t))(Y(t) - Y(0))] - E[Y(t+s) - Y(t)]E[Y(t) - Y(0)] \\ &= E[Y(t+s)Y(t) - Y(0)Y(t+s) - Y(t)^2 + Y(0)Y(t)] - \\ &\qquad -E[Y(t+s)]E[Y(t)] + Y(0)E[Y(t+s)] + E[Y(t)]^2 - Y(0)E[Y(t)] \\ &= R_Y(t+s, t) - E[Y(t+s)]E[Y(t)] - V[Y(t)] \end{aligned}$$

Para o cálculo do valor médio e da variância de $Y(t))$ usamos o facto de $Y(t) = Y(0)e^{X(t)}$ e a função geradora de momentos de $X(t)$ dada por (2.6).

Concretamente, temos

$$E[Y(t)] = E[Y(0)e^{X(t)}] = Y(0)M_{X(t)}(1) = Y(0)\exp\left\{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2) \times t\right\},$$

$$\begin{aligned} Var[Y(t)] &= E[Y^2(t)] - E[Y(t)]^2 = Y(0)^2 \left(E[e^{2X(t)}] - E[e^{X(t)}]^2 \right) \\ &= Y(0)^2 \left(M_{X(t)}(2) - M^2_{X(t)}(1) \right) \\ &= Y(0)^2 e^{2(\mu t + \sigma^2 t)} - e^{2\mu t + \sigma^2 t} \\ &= Y(0)^2 e^{2t\mu + \sigma^2 t}(e^{\sigma^2 t} - 1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R_Y(t+s,t) &= E[Y(t+s)Y(t)] = Y(0)^2 E[e^{X(t+s)}e^{X(t)}] = Y(0)^2 E[e^{X(t+s)-X(t)+X(t)}e^{X(t)}] \\ &= Y(0)^2 E[e^{X(t+s)-X(t)}]E[e^{2X(t)}] = Y(0)^2 E[e^{X(s)}]E[e^{2X(t)}] \\ &= Y(0)^2 M_{X(s)}(1) M_{X(t)}(2) \\ &= Y(0)^2 \exp \mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s + 2\mu t + 2\sigma^2 t \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} Cov[Z_1, Z_2] &= Y(0)^2 e^{\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s + 2\mu t + 2\sigma^2 t} - Y(0) e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t} Y(0) e^{\mu(t+s) + \frac{1}{2}\sigma^2 (t+s)} - \\ & -Y(0)^2 (e^{2\mu t + 2\sigma^2 t} - e^{2\mu t + \sigma^2 t}) \neq 0 \end{aligned}$$

Sendo assim, o movimento Browniano geométrico, não tem incrementos independentes.

2.2.3 Movimento Browniano Integrado

Definição 2.2.5 (Movimento Browniano Integrado) *Se $\{Y(t),\ t \geq 0\}$ é um movimento Browniano com impulso, ao processo $\{Z(t),\ t \geq 0\}$ com $Z(t) = Z(0) + \int_0^t Y(s)ds$, damos o nome de movimento Browniano integrado.*

Proposição 2.2.7 *O movimento Browniano integrado é um processo Gaussiano.*

Em termos dos incrementos do movimento Browniano integrado o processo não é simples.

Propriedade 2.2.2 *Os incrementos do movimento Browniano integrado não são nem independentes nem estacionários.*

Demonstração. Consideremos a situação particular em que o movimento Browniano integrado $\{Z(t),\ t \geq 0\}$ está definido em termo de um movimento Browniano com coeficiente de impulso nulo e coeficiente de difusão unitário e $Z(0) = 0$. Por outras palavras,

$$Z(t) = \int_0^t Y(s)ds \ ,$$

sendo $\{Y(t),\ t \geq 0\}$ um movimento Browniano padrão.

Nestas condições, $E[Y(t)] = 0$ e, usando o teorema de Fubini[4]

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= E\left[\int_0^t Y(s)\,ds\right] \\ &= \int_0^t E[Y(s)]\,ds = \int_0^t 0\,ds = 0 \end{aligned}$$

Para verificar se os incrementos do movimento Browniano integrado sao independentes, vamos estudar a correlação entre os incrementos $Z(t)$ e $Z(t+s) - Z(t)$. Como,

$$\begin{aligned} E[Z(t+s)Z(t)] &= E\left[\int_0^{t+s} Y(u)du \int_0^t Y(v)dv\right] = E\left[\int_0^t \int_0^{t+s} Y(u)Y(v)du\,dv\right] \\ &= \int_0^t \int_0^{t+s} E[Y(u)Y(v)]du\,dv \\ &= \int_0^t \left(\int_0^v \min(u,v)du + \int_v^{t+s} \min(u,v)du\right) dv \\ &= \int_0^t \left(\int_0^v u\,du + \int_v^{t+s} v\,du\right) dv \\ &= t^2(t/3 + s/2)\ , \end{aligned} \tag{2.7}$$

então

$$\begin{aligned} Cov[Z(t+s) - Z(t), Z(t)] &= E[(Z(t+s) - Z(t))Z(t)] - E[Z(t+s) - Z(t)]E[Z(t)] \\ &= E[Z(t+s)Z(t) - Z^2(t)] - 0 = E[Z(t+s)Z(t)] - E[Z(t+0)Z(t)] \\ &= t^2(t/3 + s/2) - t^3/3 \neq 0 \end{aligned}$$

donde as variáveis $Z(t+s) - Z(t)$ e $Z(t)$ não sao independentes.

Também os incrementos não são estacionários pois $Z(t+s) - Z(t)$ e $Z(s)$, correspondendo a intervalos de tempo de igual amplitude s, não tem a mesma distribuição. De facto, comparando os seus momentos simples de segunda ordem, temos, usando (2.7) para escolhas convenientes de tempo,

$$E[Z^2(s)] = E[Z(s+0)Z(s)] = s^3/3$$

[4]No espaço de Probabilidades designamos por L^2 o espaço de Hilbert as v.a. X com norma L^2, dado por $E([(X)^2])^{\frac{1}{2}}$ finita, então se verifica $\int_0^t E[Y(s)^2]ds = E[\int_0^t [Y(s)^2]]ds$

e

$$\begin{aligned}
E[(Z(t+s)-Z(t))^2] &= E[Z^2(t+s)] - 2E[Z(t+s)Z(t)] + E[Z^2(t)] \\
&= E[Z((t+s)+0)Z(t+s)] - 2E[Z(t+s)Z(t)] + E[Z(t)^2] \\
&= (t+s)^2(t+s)/3 - 2t^2(t/3+s/2) + t^3/3 \\
&\neq s^3/3
\end{aligned}$$

como queriamos demonstrar.

2.2.4 Ponte Browniana

Definição 2.2.6 (Ponte Browniana) *Seja $\{B(t),\ t \geq 0\}$ um movimento Browniano padrão. O processo estocástico condicional $\{Z(t),\ t \geq 0\}$ onde $Z(t) = B(t) \mid B(1) = 0$ é chamada de ponte Browniana ou processo de Wiener atado.*

Proposição 2.2.8

A ponte Browniana é um processo de difusão gaussiano; logo, também é um processo de Markov.

Consideremos um movimento Browniano padrão $\{B(t),\ t \geq 0\}$ com $B(s) = b_s$. Nestas condições, porque os incrementos de um movimento Browniano padrão são independentes, a distribuição de $B(t)$ condicional à ocorrência de $B(s) = b_s$ se pode escrever em termos de uma distribuição normal. De facto, para todo $0 < t < s$, resulta

donde se pode provar que, para $0 < t < s$,

$$B(t)\,\big|_{B(s)=b_s} \frown N\left(\frac{b_s t}{s}, \frac{t(s-t)}{s}\right). \tag{2.8}$$

Assim, se tomamos uma ponte Browniana $\{Z(t),\ t \geq 0\}$, onde $Z(t) = B(t) \mid B(1) = 0$, de (2.8) com $s = 1$ e $b_s = 0$, podemos deduzir que

$$Z(t) \frown N(0, t(1-t)).$$

Além disso, é possível determinar a função de autocovariância da ponte Browniana. Se $0 < t \leq r < 1$

$$\begin{aligned} C_Z(t,r) &= E[Z(t)Z(r)] - E[Z(t)]E[Z(r)] = E[Z(t)Z(r)] - 0 \\ &= E[E[Z(t)Z(r)|Z(r)]] = E[Z(r)E[Z(t)|Z(r)]] \\ &= E[Z(r)\frac{Z(r)t}{r}] = \frac{t}{r}E[Z^2(r)] \\ &= \frac{t}{r}r(1-r) = t - tr \\ &= \min(t,r) - tr \end{aligned}$$

Com base nas propriedades observadas para o processo $\{Z(t),\ t \geq 0\}$ acima, uma segunda definição de ponte Browniana foi esclarecida a qual é útil na verificação se um novo processo é uma ponte Browniana.

Definição 2.2.7 (Ponte Browniana) *Se $\{Z(t),\ t \geq 0\}$ é um processo gaussiano com função média nula e função de autocovariância*

$$C_Z(s,t) = \min(s,t) - st$$

diremos que $\{Z(t),\ t \geq 0\}$ é uma ponte Browniana.

Exemplo 2.2.2 *Seja $\{B(t),\ t > 0\}$ um movimento Browniano padrão. Sabendo que o processo estocástico $\{Z_1(t),\ 0 < t < 1\}$, definido por $Z_1(t) = B(t) - tB(1)$, é um processo Gaussiano, verifiquemos que se trata de uma ponte Browniana, tendo em conta a Definição 2.2.7.*

Pelas propriedades do movimento Browniano padrão, temos que a função média do processo $\{Z_1(t),\ 0 < t < 1\}$ é dada por

$$m_{Z_1}(t) = E[Z_1(t)] = E[B(t) - tB(1)] = E[B(t)] - tE[B(1)] = 0 - t \times 0 = 0 \ ,$$

e a função de autocovariância é dada por

$$\begin{aligned} C_{Z_1}(t,s) &= E[Z_1(t)Z_1(s)] - 0 = E[(B(t) - tB(1))(B(s) - sB(1))] \\ &= E[B(t)B(s) - sB(t)B(1) - tB(1)B(s) + tsB(1)B(1)] \\ &= Cov[B(t)B(s)] - sCov[B(t)B(1)] - tCov[B(1)B(s)] + tsCov[B(1)B(1)] \\ &= min\{t,s\} - st - ts + ts \times 1 \\ &= min\{t,s\} - ts \ . \end{aligned}$$

Por conseguinte, as condições da Definição 2.2.7 estão satisfeitas e, portanto, o processo

$$\{Z_1(t),\ 0 < t < 1\}$$

é uma ponte Browniana.

Exemplo 2.2.3 *Consideremos o processo $\{Z_2(t),\ 0 < t < 1\}$ tal que $Z_2(t) = (1-t)B\left(\frac{t}{1-t}\right)$, com $0 < t < 1$, $Z_2(1) = 0$ e $\{B(t),\ 0 < t < 1\}$ é um movimento Browniano padrão. Nestas condições, o processo $\{Z_2(t),\ 0 < t < 1\}$ é uma ponte Browniana. Na realidade, primeiramente constatemos que $\{Z_2(t),\ 0 < t < 1\}$ é um processo gaussiano pois é a transformação afim de um processo de Wiener o qual é Gaussiano.*
Usando ainda as propriedades do movimento Browniano padrão, observamos, em segundo lugar, que

$$E[Z_2(t)] = (1-t)E[B\frac{t}{1-t}] = (1-t) \times 0 = 0$$

E, por último, que

$$\begin{aligned}
C_{Z_2}(t,s) &= E[Z_2(t)Z_2(s)] = E\left[(1-t)B\left(\frac{t}{1-t}\right) \times (1-s)B\left(\frac{s}{1-s}\right)\right] \\
&= (1-t)(1-s)E\left[B\left(\frac{t}{1-t}\right)B\left(\frac{s}{1-s}\right)\right] \\
&= (1-t)(1-s)\min\left(\frac{t}{1-t}, \frac{s}{1-s}\right) = \min t(1-s), s(1-t) \\
&= \min{(t-ts)}, s-st = \min t, s-ts.
\end{aligned}$$

Portanto, $\{Z_2(t),\ 0 < t < 1\}$ é uma ponte Browniana.

Exemplo 2.2.4 *Seja $\{Z(t),\ 0 \le t \le 1\}$ uma ponte Browniana e defina-se*

$$Y(t) = \int_0^t Z(r)dr, \quad \forall\ 0 \le t \le 1\ .$$

Nestas condições, temos que a função média do processo $\{Y(t),\ 0 \le t \le 1\}$ é nula já que

$$E[Y(t)] \;=\; E\left[\int_0^t Z(r)dr\right] = \int_0^t E[Z(r)]dr = \int_0^t 0\,dr = 0$$

no entanto, a função de autocovariância não satisfaz a condição exigida na Definição 2.2.7. De *facto, temos*

$$\begin{aligned}
C_Y(t,t+s) &= E[Y(t)Y(t+s)] = E\left[\int_0^t Z(u)du \int_0^{t+s} Z(v)dv\right] \\
&= \int_0^t \int_0^{t+s} E[Z(u)Z(v)]du\,dv \\
&= \int_0^t \int_0^{t+s} C_Z(u,v)du\,dv \\
&= \int_0^t \left(\int_0^v (\min(u,v)-uv)du + \int_v^{t+s} (\min(u,v)-uv)du\right) dv \\
&= \int_0^t \left(\int_0^v (u-uv)\,du + \int_v^{t+s} (v-uv)\,du\right) dv \\
&= \int_0^t \left((1-v)\int_0^v u\,du + v\int_v^{t+s} (1-u)\,du\right) dv \\
&= \int_0^t \left((1-v)\frac{v^2}{2} + v((t+s) - \frac{(t+s)^2}{2} - v + \frac{v^2}{2}))\right) dv \\
&= \frac{t^2}{2} \times \left[(t+s) - \frac{(t+s)^2}{2}\right] \\
&\neq \min(t,t+s) - t(t+s) = t(1-(t+s))
\end{aligned}$$

Donde se conclui que $\{Y(t),\ 0 \leq t \leq 1\}$ *não é ponte Browniana.*

2.2.5 Processo de Ornstein-Uhlenbeck

Na prática, o processo de Wiener não se mostrou adequado à modelação do deslocamento das partículas para valores de t pequenos já que, por exemplo, não permite o cálculo da velocidade instantânea pois o movimento Browniano não é, em parte alguma, diferenciável.

Em 1930, Unlenbeck e Ornstein propuseram um novo modelo em que a velocidade da partícula é influenciada, em parte, pelo choque com outras partículas próximas e depende da resistência de fricção do meio em que circundam de tal modo que o efeito desta resistência é proporcional à velocidade.

Definição 2.2.8 (Processo de Ornstein-Uhlenbeck) *Seja* $\{B(t),\ t \geq 0\}$ *um movimento Browniano padrão. O processo* $\{U(t),\ t \geq 0\}$, *com* $U(t) = e^{-\alpha t} B\left(\frac{\sigma^2 e^{2\alpha t}}{2\alpha}\right)$, *para* $t \geq 0$, *e* α *constante positiva é designado por processo de Ornstein-Uhlenbeck.*

Reparemos que o processo $\{U(t),\ t \geq 0\}$ é um caso particular da transformação $U(t) = g(t) \times B(f(t))$ onde $f(t)$ é uma função não negativa, contínua e estritamente crescente, para $t \geq 0$, e $g(t)$ é uma função real contínua. Assim, o processo de Ornstein-Uhlenbeck é uma transformação somente em função de t do movimento Browniano padrão o qual é Gaussiano; logo, o processo de Ornstein-Uhlenbeck também é Gaussiano. E, sendo Gaussiano, a sua distribuição fica completamente determinada pela sua função média e pela sua função de auto-covariância dadas, respectivamente por

$$m_U(t) = E[U(t)] = E\left[e^{-\alpha t} B\left(\frac{\sigma^2 e^{2\alpha t}}{2\alpha}\right)\right] = e^{-\alpha t} E\left[B\left(\frac{\sigma^2 e^{2\alpha t}}{2\alpha}\right)\right] = 0$$

e

$$\begin{aligned} C_U(t+s,t) &= E[U(t+s)U(s)] = E\left[e^{-\alpha(s+t)} B\left(\frac{\sigma^2 e^{2\alpha(t+s)}}{2\alpha}\right) \times e^{-\alpha t} B\left(\frac{\sigma^2 e^{2\alpha t}}{2\alpha}\right)\right] \\ &= e^{-\alpha(2t+s)} C_B\left(\frac{\sigma^2 e^{2\alpha(t+s)}}{2\alpha}, \frac{\sigma^2 e^{2\alpha t}}{2\alpha}\right) \\ &= e^{-\alpha(2t+s)} \min\left(\frac{\sigma^2 e^{2\alpha(t+s)}}{2\alpha}, \frac{\sigma^2 e^{2\alpha t}}{2\alpha}\right) = e^{-\alpha(2t+s)} \frac{\sigma^2 e^{2\alpha t}}{2\alpha} \\ &= \frac{\sigma^2 e^{-\alpha s}}{2\alpha} \qquad (2.9) \\ & \qquad (2.10) \end{aligned}$$

É também conhecido um resultado geral sobre os parâmetros infinitesimais associados a processos da forma do processo de Ornstein-Uhlenbeck.

Proposição 2.2.9 *Seja $\{X(t),\ t \geq 0\}$ um processo tal que $X(t) = g(t) \times B(f(t))$, onde $\{B(t),\ t \geq 0\}$ é um movimento Browniano padrão, $f(t),\ t \geq 0$, é uma função não negativa, contínua e estritamente crescente, e $g(t),\ t \in \mathbb{R}$, é uma função contínua. Nestas condições, o processo $\{X(t),\ t \geq 0\}$ é um processo Gaussiano cujos parâmetros infinitesimais sao dados por:*

$$m(x;t) = (g'(t)/g(t))x \qquad e \qquad v(x;t) = g^2(t) f'(t)\ ,\ \text{com } x \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

O processo de Ornstein-Uhlenbeck $\{U(t),\ t \geq 0\}$ acima referido está nas condições da Proposição 2.2.9 com

$$f(t) = \frac{\sigma^2 e^{2\alpha t}}{2\alpha} \quad \text{e} \quad g(t) = e^{-\alpha t}\ .$$

Consequentemente, os parâmetros infinitesimais do processo de Ornstein-Uhlenbeck são dados por

$$m_U(u;t) \;=\; \frac{-\alpha e^{\alpha t}}{e^{-\alpha t}} \times x = -\alpha x$$

e

$$v_U(u;t) \;=\; e^{-2\alpha t} \times \sigma^2 e^{2\alpha t}) = \sigma^2.$$

Definição 2.2.9 (Processo de Ornstein-Uhlenbeck) *A um processo estocástico* $\{U(t),\ t \geq 0\}$ *cujos parâmetros infinitesimais são dados por* $m_U(u;t)$=$-\alpha x$ *e* $v_U(u;t)$=σ^2*, com constantes reais* $\alpha > 0$ *e* $\sigma^2 > 0$ *chamamos de processo de Ornstein-Uhlenbeck.*

Proposição 2.2.10 *O processo de Ornstein-Uhlenbeck é um processo de difusão Markoviano, com incrementos estacionários e não independentes.*

Demonstração. O processo de Ornstein-Uhlenbeck é um processo de Markov pois é uma transformação de escala do parâmetro tempo do movimento Browniano padrão o qual é Markoviano. Por outro lado, atendendo à (2.9),

$$\begin{aligned}
&Cov[U(t+s)-U(t), U(t)-U(0)] = \\
&\quad= E[(U(t+s)-U(t))(U(t)-U(0))] - 0 \\
&\quad= E[U(t+s)U(t)] - E[U(t+s)U(0)] - E[U(t)U(t)] - E[U(0)U(t)] \\
&\quad= C_U(t+s,t) - C_U(t+s,0) - C_U(t,t) - C_U(t,0) \\
&\quad= \frac{\sigma^2}{2\alpha}[e^{-\alpha s} - e^{-\alpha(t+s)} - 1 + e^{-\alpha t}] \neq 0
\end{aligned}$$

Contrariamente ao movimento Browniano , os incrementos $U(t+s)-U(t)$ e $U(t)-U(0)$ do processo de Ornstein-Uhlenbeck $\{U(t),\ t \geq 0\}$ não são independentes. Além disso, $\{U(t), t \geq 0\}$ é um processo estacionário no sentido lato, pois a expressão (2.9) para $C_U(t+s,t)$ não depende de t, logo os incrementos do processo são estacionários, $U(t)-U(s)$ tem a mesma distribuição que $U(t)-U(0)$ que por sua vez é gaussiana.

Falta provar que é um processo de difusão. Tendo em conta que o processo é Markoviano, cujos parâmetros infinitesimais são funções contínuas de x e de t, o processo $\{U(t), t \geq 0\}$ é um processo de difusão.

Se modelarmos o deslocamento da partícula por um movimento Browniano $\{X(t),\ t \geq 0\}$ e considerarmos que $U(t)$ é a velocidade da partícula no instante t, então podemos escrever que a posição $X(t)$ no instante t é dada por

$$X(t) = X(0) + \int_0^t U(s)ds\,.$$

Assim, temos que

$$E[X(t) - X(0)] = E[\int_0^t U(s)ds] = \int_0^t E[U(s)]ds = 0$$

e

$$\begin{aligned}
Var[X(t) - X(0)] &= E[(X(t) - X(0))^2] - 0 \\
&= E[\int_0^t U(s)ds \times \int_0^t U(r)dr] \\
&= E[\int_0^t (\int_0^t U(s)U(r)ds)dr] \\
&= \int_0^t (\int_0^t E[U(s)U(r)]ds)dr] \\
&= \int_0^t (\int_0^t Cov[U(s), U(r)]ds)dr \\
&= \int_0^t \int_0^t \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|s-r|} ds\, dr \\
&= \frac{\sigma^2}{2\alpha} \int_0^t \left(\int_0^r e^{\alpha(s-r)} ds + \int_r^t e^{\alpha(r-s)} ds \right) dr \\
&= (\sigma^2/\alpha^3) \times (\alpha t - 1 + e^{-\alpha t})
\end{aligned}$$

Como $e^{-\alpha t} = 1 - \alpha t + \frac{1}{2}(\alpha t)^2 - \frac{1}{6}(\alpha t)^3 + \ldots$, temos que $Var[X(t) - X(0)] \sim \sigma^2 t^2/(2\alpha)$ para valores pequenos de t, e $\sigma^2 t/(\alpha^2)$ para valores elevados de t. Este resultado para a modelação do deslocamento de uma partícula é mais realista do que considerar que a sua variância é sempre proporcional a t, como considera o movimento Browniano padrão.

Tendo em conta a Definição 2.2.8 podemos deduzir que o processo de Wiener pode ser considerado como um processo de Ornstein-Uhlenbeck tomando o limite quando α decresce para zero. E, de modo inverso, considerando o processo de Ornstein-Uhlenbeck $\{U(t),\ t \geq 0\}$, consegue-se provar que com $B(0) = 0$ e

$$B(t) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha t}}\, U\left(\frac{1}{2\alpha} \ln\left(\frac{2\alpha t}{\sigma^2}\right)\right), \quad \forall t > 0\,,$$

$\{B(t),\ t \geq 0\}$ é um movimento Browniano.

Exemplo 2.2.5 *Consideremos o processo* $\{X(t),\ t \geq 1\}$ *tal que*

$$X(t) = \exp(1/t)B\left(\exp(-1/t)\right)\ ,\forall t \geq 1$$

onde $\{B(t),\ t \geq 1\}$ *é um movimento Browniano padrão . Nestas circunstâncias, o processo* $\{X(t),\ t \geq 1\}$ *é um processo de Wiener porque corresponde a uma transformação de escala de um movimento Browniano; logo, também será um processo Gaussiano. A sua função média é dada por:*

$$E[X(t)] \quad = \quad E\left[\exp(1/t)B\left(\exp(-1/t)\right)\right] = \exp(1/t)E\left[B\left(\exp(-1/t)\right)\right] = 0$$

e a sua função de autocovariância é

$$\begin{aligned}
C_X(t,t+s) &= \exp\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+s}\right)E\left[B\left(\exp\left(-\frac{1}{t}\right)\right)B\left(\exp\left(-\frac{1}{t+s}\right)\right)\right] \\
&= \exp\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+s}\right)C_B\left(\exp\left(-\frac{1}{t}\right),\exp\left(-\frac{1}{t+s}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+s}\right)\times\min\left(\exp\left(-\frac{1}{t}\right),\exp\left(-\frac{1}{t+s}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+s}\right)\times\exp\left(\frac{1}{t}\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{t+s}\right)
\end{aligned}$$

Uma vez que $C_X(t,t+s)$ *é função dos instante* t *e* s*, concluímos que* $\{X(t),\ t \geq 1\}$ *não é um processo estacionário.*

Além disso, porque $X(t)$ *é da forma* $g(t)\times B(f(t))$ *com* $f(t) = g(-t) = \exp(-1/t)$ *nas condições descritas na Proposição 2.2.9, podemos deduzir que* $\{X(t),\ t \geq 1$ *é um processo com parâmetros infinitesimais*

$$m_X(x;t) = \frac{-\frac{1}{t^2}\exp\left(\frac{1}{t}\right)}{\exp\left(\frac{1}{t}\right)}\,x = -\,\frac{x}{t^2}$$

e

$$v_X(x;t) = \exp\left(\frac{2}{t}\right)\exp\left(-\frac{1}{t}\right)\times\frac{1}{t^2} = \frac{\exp(1/t)}{t^2}$$

Uma vez que estes parâmetros infinitesimais não estão nas condições da Definição 2.2.9, quaisquer que sejam as constantes positivas α *e* σ^2 *que se tomem, concluímos que* $\{X(t),\ t \geq 1\}$ *não é um processo de Ornstein-Uhlenbeck.*

2.2.6 Ruído Branco

Definição 2.2.10 (Ruído Branco Gaussiano) *Um processo estocástico* $\{X(t),\ t \geq 0\}$ *com função média nula e função de auto-covariância dada por*

$$C_X(t_1, t_2) = \sigma^2 \delta(t_2 - t_1)\,,$$

onde $\delta(x)$ *é a função delta de Dirac é definida por* $\delta(t) = 0$ *para* $t \neq 0$ *e* $\delta(0) = \infty$ *tal que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1\ ,$$

designamos de ruído branco Gaussiano

Consideremos o processo $\{X(t),\ t \geq 0\}$ definido, simbolicamente, por

$$X(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{W(t+\varepsilon) - W(t)}{\varepsilon} \tag{2.11}$$

onde $\{W(t),\ t \geq 0\}$ é um movimento Browniano com $\mu = 0$ e $\sigma^2 > 0$. Nestas condições, o processo $\{X(t),\ t \geq 0\}$ é um ruído branco Gaussiano pois está de acordo com a Definição 2.2.10. De facto[5], a função média do processo é dada por

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} E[\frac{W(t+\varepsilon) - W(t)}{\varepsilon}] \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\ 0 = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\ 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois os incrementos $W(t+\varepsilon) - W(t)$ de um movimento Browniano têm distribuição Gaussiana de valor médio igual a zero. E, para a função de auto-covariância temos que

$$\begin{aligned} & C_X(t_1, t_2) = \\ = & \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^2} \times E[(W(t_1+\varepsilon) - W(t_1)) \times (W(t_2+\varepsilon) - W(t_2))] \\ = & \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^2}[C_W(t_1+\varepsilon, t_2+\varepsilon) - C_W(t_1+\varepsilon, t_2) - C_W(t_1, t_2+\varepsilon) + C_W(t_1, t_2)] \\ = & \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}[\min(t_1+\varepsilon, t_2+\varepsilon) - \min(t_1+\varepsilon, t_2) - \min(t_1, t_2+\varepsilon) + \min(t_1, t_2)] \end{aligned}$$

Assim, se $t_1 + \varepsilon < t_2$ então

$$C_X(t_1, t_2) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \times [(t_1+\varepsilon) - (t_1+\varepsilon) - t_1 + t_1] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \times 0 = 0$$

[5] Assumimos que podemos permutar a ordem entre o limite e o operador E (de esperança).

E, se $t_1 = t_2$,

$$C_X(t_1,t_2) \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \times [(t_1+\varepsilon) - t_1 - t_1 + t_1] = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\sigma^2}{\varepsilon} = \infty\ .$$

Logo

$$C_X(t_1,t_2) \;=\; \sigma^2\delta(t_2 - t_1).$$

Assim, tomando a expressão (2.11), o ruído branco Gaussiano pode ser interpretado como a derivada de um movimento Browniano. Para facilitar a sua interpretação, vamos denotar o ruído branco Gaussiano por $\{dW(t),\ t \geq 0\}$ ou ainda $\{W'(t)dt,\ t \geq 0\}$.

Definição 2.2.11 (Derivada Generalizada) *Seja f uma função com derivada contínua em $(0,t)$. A derivada generalizada da função $W(t)$, onde $\{W(t),\ t \geq 0\}$ é um movimento Browniano, é dada por*

$$\int_0^t f(s)W'(s)ds = f(t)W(t) - \int_0^t W(s)f'(s)ds$$

Definição 2.2.12 (Integral Estocástico) *Seja f uma função com derivada contínua em $[a,b]$, com $a \geq 0$. O integral estocástico é dado por*

$$\int_a^b f(t)dW(t) = f(b)W(b) - f(a)W(a) - \int_a^b W(t)df(t) \tag{2.12}$$

onde $\{W(t),\ t \geq 0\}$ é um movimento Browniano.

Notemos que usando (2.11) também podemos derivar a expressão (2.12) para o integral estocástico. Na realidade, de (2.11) podemos escrever Vimos então

$$\int_a^b f(t)dW(t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^b f(t)\frac{W(t+\varepsilon) - W(t)}{\varepsilon}dt \tag{2.13}$$

Assim, usando a fórmula

$$\frac{W(t+\varepsilon) - W(t)}{\varepsilon} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} W(s)ds\right)$$

e por integração por partes, obtemos

$$\int_a^b f(t)dW(t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\{ \left[f(t)\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} W(s)ds \right]_a^b - \int_a^b f'(t)\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} W(s)ds\right)dt \right\}$$

donde, sendo $W(t)$ uma função continua e pela regra de l'Hopital,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} W(s)ds = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{d}{d\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} W(s)ds = \lim_{\varepsilon\to 0^+} W(t+\varepsilon) = W(t)$$

resultando então de (2.12) a expressão (2.12).

Proposição 2.2.11 *O integral estocástico é uma combinação linear de variáveis aleatórias gaussianas seguindo também uma distribuição Gaussiana, de valor médio zero e variância* $\sigma^2 \int_a^b f^2(t)dt$.

Seja $\{X(t),\ t \geq 0\}$ um processo estocástico em tempo contínuo, espaço de estados contínuo e com parâmetros infinitesimais $m_X(x;t)$ e $v_X(x;t)$. Prova-se que esse processo pode ser representado da seguinte forma:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t m[X(s);s]\,ds + \int_0^t \sqrt{v[X(s);s]}\,dB(s)\ ,$$

onde $\{B(t),\ t \geq 0\}$ é um movimento Browniano padrão. Assim, $X(t)$ será a solução da equação diferencial estocástica

$$dX(t) = m[X(t);t]\,dt + \sqrt{v[X(t);t]}\,dB(t)$$

Quando sujeito à condição $X(t) = x$, a equação estocástica é equivale à equação

$$dX(t) = m[x;t]\,dt + \sqrt{v[x;t]}\,dB(t)$$

ou, ainda,

$$\frac{d}{dt}X(t) = m[x;t] + \sqrt{v[x;t]}\,\frac{d}{dt}B(t).$$

Capítulo 3

Uma Aplicação nos Seguros

3.1 Seguros: Origem e Principais Conceitos

Como os Seguros são baseados no conceito de divisão de riscos, quando se abordam as suas origens é habitual recorrer-se ao clássico caso dos comerciantes da Babilónia do século XIII a.C.. Os comerciantes, preocupados com o risco de perder algum camelo na travessia do deserto quando se deslocavam para mercados vizinhos, formavam acordos nos quais quem perdesse um camelo nestas travessias, por desaparecimento ou morte, recebia ouro pago pelos demais comerciantes. Na verdade, sinais primitivos de preocupação do homem em se segurar são encontrados desde a pré-história. No início dos tempos o homem era nómada e, como tal, os riscos eram maiores. Não bastava proteger-se dos animais e das pragas bem como dos terramotos, raios, chuva ou de outras catástrofes semelhantes.

Com o passar dos tempos surge a vida em grupos onde o homem se começa a fixar em regiões que lhes proporcionam segurança e condições de sobrevivência. Neste contexto, nasce o mutualismo, o qual pode ser definido como um grupo de pessoas com interesse em comum constituindo uma reserva económica para dividir o risco de um acontecimento não previsto. Essa prática foi proibida pela Igreja na Idade Média pois, segundo o clero, só a vontade divina podia minorar as desgraças infortunas do homem.

O seguro marítimo pode ser considerado como um dos mais antigos e base para a realização de outros seguros. O primeiro contrato de seguro marítimo, com emissão de apólice, foi redigido em italiano em 1347, em Gênova. Com o incêndio de 1667 em Londres, surge a primeira companhia de seguros "contra incêndios", em 1684, criando assim o primeiro seguro contra incêndios do mundo. A mais tradicional companhia de seguros do mundo (Lloyd's) nasceu também em Inglaterra, em 1690, originária de uma taberna e de um jornal dedicado a relatar acontecimentos marítimos.

Para definir Seguros podemos recorrer à definição dada por Fenaseg, Federação Nacional das Empresas de Seguros Privados e de Capitalização, do Brasil, que diz que os Seguros são operações que tomam forma jurídica de contratos em que uma das partes (*Segurador*) se obriga para com a outra (*Segurado*), mediante o recebimento de uma importância estipulada (*Prémio*), a compensá-la (*Indemnização*[1] por um prejuízo resultante de um possível acontecimento (*Sinistro ou Reclamação*[2]) incerto (*Risco*) indicado no contrato.

Assim, no âmbito dos Seguros, temos vários termos básicos interligados. São eles:

Definição 3.1.1 (Segurador) *O segurador é a entidade jurídica, legalmente constituída, para assumir e gerir os riscos especificados no contrato de seguro. É ele que emite a apólice e, no caso de ocorrência de sinistro e na posse do pagamento do prémio, será o responsável pela indemnização de acordo com as coberturas contidas na apólice.*

Definição 3.1.2 (Segurado) *O segurado é a pessoa, física ou jurídica, em nome de quem se faz o seguro. O segurado transfere para a seguradora, mediante pagamento do prémio, o risco de um acontecimento aleatório a atingir ou bem do seu interesse.*

Definição 3.1.3 (Indemnização ou Perda) *A indemnização corresponde ao que a Seguradora paga ao segurado pelos prejuízos decorrentes de um sinistro. A indemnização nunca é superior à importância segurada.*

Definição 3.1.4 (Prémio) *O prémio é o preço ou custo do seguro especificado no contrato. O seu valor depende do prazo do seguro, resulta da aplicação de uma percentagem sobre a importância segurada e será usado para cobrir as indemnizações, despesas administrativas e gerar lucro para a seguradora.*

Definição 3.1.5 (Risco) *O risco representa a probabilidade de um acontecimento inesperado ocorrer gerando prejuízos, necessidades económicas, danos materiais ou pessoais.*

[1] Na literatura da Teoria do Risco, o termo usado é *Perda* (em inglês, *loss*)

[2] Da tradução do inglês de *claim*.

Inicialmente a Teoria do Risco estava associada a unidades de riscos individuais sendo que o comportamento de toda a carteira era deduzido como a soma dos resultados individuais. Com o desenvolvimento no campo estocástico os resultados, outrora obtidos através de modelos determinísticos, passam a ser incorporados como valores esperados nos modelos probabilísticos.

Em geral, a Teoria do Risco trata da análise de riscos do ramo não-vida (incêndios, catástrofes naturais, etc). Um dos seus principais objectivos é o estudo do afastamento que existe entre os resultados financeiros e os esperados e ainda dos métodos que evitam consequências não desejadas resultantes desse afastamento. Na Teoria do Risco é considerada como base de estudo uma carteira de seguros, também conhecida por um conjunto de apólices, que são agrupadas de acordo com certas características. Suponhamos que N é o número de indemnizações de uma carteira e X_i o montante individual da indemnização i e ainda que as indemnizações são independentes entre si com a mesma distribuição e independentes de N. Então, em cada período, podemos definir $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$, um montante aleatório que conhecida as distribuições de X e N se consegue obter, em geral e por aproximação, a sua distribuição.

Os Seguros recorrem à Teoria do Risco com vista a estabelecer modelos probabilísticos adequados à modelação de indemnizações que possam advir da ocorrência, em geral rara, de um dado fenómeno aleatório e assim estabelecer o valor do prémio a cobrar por cada apólice de seguro. Na realidade, é essencial para a actividade de qualquer Seguradora estimar a perda que uma dada carteira de cliente lhe proporcionará. Interessará também modelar os valores mais elevados (valores máximos) do prejuízo produzido pelas apólices que constituem a sua carteira de seguros. Daí o contributo fundamental da Teoria de Valores Extremos no desenvolvimento de modelos mais adequados([**?**],[6]). Na presente dissertação não iremos abordar a modelação dos valores extremos. Tradicionalmente, no âmbito dos Seguros, o foco reside no cálculo de valores esperados de diferentes variáveis aleatórias de interesse.

Em termos simples e exemplificando, se uma Companhia de Seguros possui uma carteira (conjunto) de clientes da qual recebe, por ano, uma média de 50 reclamações, e cada reclamação representa uma média de 1000 euros de indemnização (ou perda), a indemnização total (também chamada de indemnização agregada ou perda agregada) esperada para essa carteira terá um valor estimado de $50 \times 1000 = 50000$euros. Possuindo um total de 250 apólices, estima-se então que o valor médio do prémio deverá ser superior a (indemnização total)/(número de apólices)= 200 euros por apólice, a fim de cobrir as despesas comerciais e administrativas com a criação da apólice e originar uma margem de lucro para a Seguradora.

Existem dois tipos de modelos de risco: o modelo de risco Individual e o modelo de risco Colectivo. Nos modelos de risco individual estima-se o valor total de indemnizações utilizando a distribuição do valor de indemnização de cada apólice e a distribuição do número de ocorrências de cada apólice. No modelo de risco colectivo definem-se grupos de clientes segundo um dado critério e estima-se o valor total de indemnizações utilizando a distribuição do valor de indemnizações dos grupos de apólices (clientes) e a distribuição do número de grupos de apólices.

Face à dificuldade de obtenção das distribuição de probabilidade do número de indemnizações e do valor de indemnizações de cada apólice individualmente, o modelo colectivo é, geralmente, o mais usado sendo esse o que iremos considerar. No modelo colectivo não é necessário inferir sobre características individuais das apólices.

Assim, de acordo com o modelo do risco colectivo, a soma dos montantes das indemnizações (indemnização agregada) é dada por

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{3.1}$$

onde N representa o número aleatório de sinistros e X_i a severidade do sinistro i ou ainda os montantes de pagamentos individuais. É comum assumir-se que N segue uma distribuição de Poisson ou Binomial Negativa, independente da variável X_i, e a indemnização agregada S seja modelada por uma distribuição de Poisson composta ou por uma Binomial Negativa composta. Grande parte da literatura em Risco Actuarial diz respeito ao estudo da distribuição de probabilidade da variável aleatória S.

O cálculo do valor médio e a variância das indemnizações agregadas associadas a um modelo de risco colectivo para um período, está relacionado com as distribuições adoptadas para N (também conhecida por distribuição de frequência) e para X (também designada por variável de severidade). Nomeadamente, temos

$$\begin{aligned} E[S] &= E(\sum_{i=1}^{N} X_i) = E(E[S|N]) = E(E[X]N) \\ &= pE[N] \end{aligned}$$

(produto entre o nº esperado de indemnizações pelo montante esperado das indemnizações individuais) e

$$\begin{aligned} Var[S] &= E(Var[S|N] + Var(E[S|N] = E(NVar[X]) + Var(pN) \\ &= E[N]Var(X) + p^2Var[N] \end{aligned}$$

A distribuição de S é obtida usando o Teorema da probabilidade total, ou seja

$$\begin{aligned} F(S) &= P[S \leq x] = \sum_{n=0}^{\infty} P[S \leq x|N = n]P[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P[\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x]P[N = n] \end{aligned}$$

Exemplo 3.1.1 *Consideremos o número aleatório de sinistros N como sendo uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro λ e seja X, a severidade do sinistro i, uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro unitário. Para o cálculo do valor médio das indemnizações agregadas podemos usar a definição de função geradora de momentos de S. Logo,*

$$\begin{aligned} M_S(r) &= E[e^{rS}] = E[Ee^{rS}|N] \\ &= E[(M_X(r))^N] = E[\exp(N \log(M_X(r))] \\ &= M_N(log(M_X(r)) \end{aligned}$$

daí que $M_S(r) = \frac{P}{1-qM_X(r)}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} M_X(r) &= \int_0^{\infty} e^{rx}e^{-x}dx = \int_0^{\infty} e^{rx-x}dx = \int_0^{\infty} e^{x(r-1)}dx \\ &= (1-r)^{-1}, \quad r < 1 \end{aligned}$$

Como $M_N(r) = \exp \lambda(e^r - 1)$ então $M_S(r) = M_N(log(M_X(r)) = exp\lambda(e^{-\log(1-r)-1}) = e^{\frac{\lambda}{1-r}-1}$ e, como tal, usando as propriedades da função geradora de momentos de S no cálculo do seu valor médio[3], vem

$$E[S] = \lambda e^{\lambda - 1}.$$

[3] $E[X^n] = \frac{d^n}{dt^n}M_X(t)|t = 0$.

3.2 Processo de Difusão por Saltos nos Seguros

Na área das aplicações dos processos estocásticos, vários trabalhos de investigação têm sido elaborados como o objectivo de modelar diversas variáveis associadas a flutuações do mercado. Em particular, encontramos diversas aplicações dos processos de difusão nas áreas do Actuariado e da Gestão Financeira (ver referências contidas em [7]). No campo dos Seguros, damos ênfase a um trabalho recente de Jang onde é proposto um modelo para as perdas agregadas com taxas de juros estocásticos usando um processo de difusão por saltos e onde se assume que o tamanho dos saltos segue uma mistura de duas distribuições exponenciais.

3.2.1 Definição

Definição 3.2.1 (Processo de difusão por saltos) *Diremos que um processo estocástico* $\{X(t),\ t \geq 0\}$ *é um processo de difusão por saltos se* $X(t)$ *apresenta a seguinte estrutura*

$$dX(t) = (b + aX(t))dt + \sigma\sqrt{X(t)}\,dB(t) + dC(t) \quad \forall t \geq 0. \tag{3.2}$$

onde

- a*,* b *e* σ *são constantes tais que* $b \geq 0$*,* $a \in R$ *e* $\sigma \geq 0$*;*
- $\{B(t),\ t \geq 0\}$ *é movimento Browniano padrão;*
- $\{C(t),\ t \geq 0\}$ *é um processo estocástico com*

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y(i) \tag{3.3}$$

  designado por processo de saltos puros, onde $N(t)$ *representa o número de saltos até ao instante* t*;*
- $Y(i)$*,* $i = 1, 2, \cdots$*, é o tamanho do salto* i*.*

Se considerarmos que $Y(i)$ representa o montante da reclamação i, ou seja, o valor da i-ésima indemnização, e $N(t)$ o número de reclamações ocorridas até ao instante t, vamos encontrar aquilo que na Teoria do Risco Actuarial Clássico, se designa por processo de perdas ou indemnizações agregadas, a uma taxa de juro nula e assumindo um modelo de risco colectivo com Y_i, $i = 1, 2, \cdots$, independentes e identicamente distribuídos com função de distribuição F. Por outras palavras, o processo de indemnizações agregadas é definido pelo processo $\{C(t),\ t \geq 0\}$, com $C(t)$ dado pela expressão 3.3, similar a (3.1).

Trivialmente, é evidente que o processo $\{X(t),\ t \geq 0\}$, que satisfaz a equação diferencial estocástica (3.2) com $a = b = \sigma = 0$, é dado por $X(t) = C(t)$. Assim, condicionado à escolha desses valores $a = b = \sigma = 0$ o processo que satisfaz a equação (3.2) corresponde ao processo de indemnizações agregadas com uma taxa de juro nula.

Se δ representar uma constante associada à taxa de juro, temos que

$$M(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y(i)\exp(\delta(t - s_i)), \quad t \geq 0, \tag{3.4}$$

com s_i o instante em que ocorre a reclamação i, representa o montante de indemnização agregado acumulado até ao instante t quando sujeito a essa taxa de juro (determinística). Se tomarmos o caso particular de $N(t) = N$, observamos que $M(t)$ satisfaz a equação diferencial estocástica

$$dM(t) = \delta M(t)dt$$

já que

$$dM(t) = \sum_{i=1}^{N} Y(i)\, d(\exp(\delta(t - s_i))) = \sum_{i=1}^{N} Y(i)\delta \exp(\delta(t - s_i))\, dt = \delta M(t)dt\ .$$

No caso geral, prova-se que $M(t)$ dado pela expressão indicada em (3.4) satisfaz a equação diferencial estocástica

$$dM(t) = \delta M(t)dt + C(t)\,,$$

a qual tem a estrutura de um processo de difusão com salto (3.2) com $b = 0$, $a = \delta$ e $\sigma = 0$

Para considerar uma taxa de juro estocástica para o montante de indemnizações agregadas acumuladas até ao instante t, que denotaremos por $L(t)$, Jang([7]) propõe o processo de difusão por saltos $\{L(t),\ t \geq 0\}$, o qual tem uma estrutura mais genérica que o processo $\{M(t),\ t \geq 0\}$ e satisfaz a equação diferencial estocástica

$$dL(t) = \mu L(t)dt + \sigma\sqrt{L(t)}dB(t) + dC(t)$$

.

Esta tem a estrutura da equação (3.2) com $b = 0$ e $a = \mu$.

Para efeito do cálculo dos prémios de seguro, interessará obter os momentos de $L(t)$. Para obter uma expressão para $E[L(t)]$ vamos supor que as chegadas das reclamações $N(t)$ provêm de um processo de Poisson de taxa ρ, $N(t)$ são independentes de $Y(i)$, $i = 1, 2, \cdots$.

3.2.2 A Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é uma função usada em muitas áreas, principalmente da Engenharia, como ferramenta auxiliar na resolução de equações diferenciais. Existem duas transformadas de Laplace, a Unilateral e a Bilateral. Concentraremo-nos na primeira que é largamente empregue no estudo de sistemas lineares invariantes no tempo e na resolução de equações diferenciais.

Definição 3.2.2 (Transformada de Laplace) *Seja $g(t)$ uma função definida para todos os valores positivos de t. Chamamos transformada de Laplace da função g à função $G(s) = \int_0^{+\infty} g(t)$ $e^{-st}dt$, definida para todos os valores $s \in \mathbb{C}$ para os quais este integral impróprio seja convergente.*

Observemos que $G(s) = E[e^{-sX}]$, com X variável aleatória contínua e função densidade de probabilidade g. A transformada conjunta de Laplace da distribuição do vector $(X(t), \psi(t))$ é definida por

$$E(e^{-\upsilon X(t)} \times e^{-\varepsilon\psi(t)} \mid X(0)) = G_{(X,\psi)}(\upsilon, \varepsilon) = G_X(\upsilon) G_\psi(\varepsilon)$$

Esta ultima igualdade so é válida se os dois processos forem independentes.

Jang ([7]) deriva a transformada conjunta de Laplace da distribuição do vector $(X(t), \psi(t))$, onde $\{X(t),\ t \geq 0\}$ é o processo de difusão por salto satisfazendo (3.2) e $\{\psi(t),\ t \geq 0\}$ é o seu processo integrado (ou seja, $\psi(t) = \int_0^t X(s)\, ds$), obtendo o seguinte resultado.

Proposição 3.2.1 *Para $\upsilon \geq 0$ e $\varepsilon \geq 0$, a transformada conjunta de Laplace da distribuição do vector $(X(t), \psi(t))$ é dada por*

$$E\left[e^{-\upsilon X(t)} \times e^{-\varepsilon\psi(t)} \mid X_0\right] = \exp[-k_1(t)X(0)] \exp\left[-\rho \int_0^t [1 - g(k_1(s))]\, ds\right] k_2^{2b/\sigma^2} \;, \qquad (3.5)$$

onde

- $g(u) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-uy} dF(y)$ *é a transformada de Laplace da distribuição F;*

- $k_1(t) = \frac{\upsilon\left[\left(\sqrt{a^2+2\sigma^2\xi}+a\right)+\left(\sqrt{a^2+2\sigma^2\xi}-a\right)e^{-\sqrt{a^2+2\sigma^2\xi},t}\right]+2\xi\left(1-e^{-\sqrt{a^2+2\sigma^2\xi},t}\right)}{\sigma^2\upsilon(1-e^{-\sqrt{a^2+2\sigma^2\xi},t})+\sqrt{a^2+2\sigma^2\xi}-a+\left(\sqrt{a^2+2\sigma^2\xi}+a\right)e^{-\sqrt{a^2+2\sigma^2\xi},t}}$

- $k_2(t) = \frac{2\sqrt{a^2+2\sigma^2\xi}\ \ \exp\left(-\frac{\sqrt{a^2+2\sigma^2\xi}+a}{2}\ t\right)}{\sigma^2\upsilon\left(1-e^{-\sqrt{a^2+2\sigma^2\xi}\ t}\right)+\sqrt{a^2+2\sigma^2\xi}-a+\left(\sqrt{a^2+2\sigma^2\xi}+a\right)e^{-\sqrt{a^2+2\sigma^2\xi}\ t}}$

Considerando a função de distribuição F, específica para o tamanho dos saltos, dada por uma mistura de duas exponenciais, ou seja, dada por

$$F(y) = \beta_1\alpha_1 e^{-\alpha_1 y} + \beta_2\alpha_2 e^{-\alpha_2 y}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0,\ \beta_1 + \beta_2 = 1$$

então a transformada de Laplace de F será dada por:

$$\begin{aligned} g(u) &= \int_0^{+\infty} g(y)e^{-uy}dt \\ &= \int_0^{+\infty} (\beta_1\alpha_1 e^{-\alpha_1 y} + \beta_2\alpha_2 e^{-\alpha_2 y})e^{-uy}dy \\ &= \beta_1\alpha_1 \int_0^{+\infty} e^{-\alpha_1 y - uy}dy + \beta_2\alpha_2 \int_0^{+\infty} e^{-\alpha_2 y - uy}dy \\ &= \frac{\beta_1\alpha_1}{\alpha_1 + u} + \frac{\beta_2\alpha_2}{\alpha_2 + u} \end{aligned}$$

$$E\left[e^{-\upsilon X(t)} \times e^{-\varepsilon\psi(t)} \mid X_0\right] = \exp[-k_1(t)X(0)]\exp\left[-\rho\int_0^t [1 - g(k_1(s))]\,ds\right] k_2^{2b/\sigma^2}\ , \tag{3.6}$$

$$E\left[e^{-\upsilon X(t)} \times e^{-\varepsilon\psi(t)} \mid X_0\right] = \exp[-k_1(t)X_0]e^{-\rho t}{k_2}^{2b/\sigma^2}(t) \times k_3^a(t) \times k_4^b(t) \times k_4^c(t) \times k_5^d(t)\ ,$$

onde:

- $k_3(t) = \frac{(\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}-a)(\alpha_1 e^{\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}\,t+\upsilon})+(\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}+a)(\upsilon e^{\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}\,t}+\alpha_1)+(2\varepsilon+\alpha_1\sigma^2\upsilon)(e^{\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}\,t}-1)}{2\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}(\alpha_1+\upsilon)}$

- $k_4(t) = \frac{(\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}+a)(\alpha_1 e^{-\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}\,t}+\upsilon)+(\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}-a)(\upsilon e^{-\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}\,t}+\alpha_1)-(2\varepsilon+\alpha_1\sigma^2\upsilon)(e^{-\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}\,t-1})}{2\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}(\alpha_1+\upsilon)}$

- $k_5(t) = \frac{(\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}-a)(\alpha_2 e^{\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}\,t}+\upsilon)+(\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}+a)(\upsilon e^{\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}\,t}+\alpha_2)+(2\varepsilon+\alpha_2\sigma^2\upsilon)(e^{\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}\,t-1})}{2\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}(\alpha_2+\upsilon)}$

- $k_6(t) = \frac{(\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}+a)(\alpha_2 e^{-\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}\,t}+\upsilon)+(\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}-a)(\upsilon e^{-\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}\,t}+\alpha_2)-(2\varepsilon+\alpha_2\sigma^2\upsilon)(e^{-\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}\,t-1})}{2\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}(\alpha_2+\upsilon)}$

- $a = \frac{(\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}-a+\sigma^2\varepsilon)\alpha_1\beta_1}{\alpha_1(\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}-a+\sigma^2\upsilon)+(\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}+a)\upsilon+2\varepsilon}\frac{\rho}{\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}}$

- $b = \frac{(\sigma^2\upsilon - \sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon} - a)\alpha_1\beta_1}{(\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}-a)\upsilon - 2\varepsilon - \alpha_1(\sigma^2\upsilon - \sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}-a)} \frac{\rho}{\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}}$

- $c = \frac{(\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon} - a + \sigma^2\varepsilon)\alpha_2\beta_2}{\alpha_2(\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}-a+\sigma^2\upsilon) + (\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}+a)\upsilon + 2\varepsilon} \frac{\rho}{\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}}$

- $d = \frac{(\sigma^2\upsilon - \sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon} + a)\alpha_2\beta_2}{(\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}-a)\upsilon - 2\varepsilon - \alpha_2(\sigma^2\upsilon - \sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}-a)} \frac{\rho}{\sqrt{a^2+2\sigma^2\varepsilon}}$

Na prática podemos precisar de usar distribuições de salto que não sejam soma de exponenciais, mas sim distribuições como Pareto, Gumbel ou mesmo Fréchet, para o caso de termos perdas extremas ou taxas de juro extremas. Nesses casos não é possível obter uma expressão para a distribuição conjunta da transformada de Laplace do vector $(X(t), \psi(t))$ sendo utilizada uma abordagem numérica para o cálculo das indemnizações agregadas.

3.2.3 Momentos da Distribuição do Processo

Vamos derivar os momentos do processo $\{X(t),\ t \geq 0\}$ usando a expressão explícita da transformada conjunta de Laplace da distribuição do vector (X_t, ψ_t) obtida acima.
Fixando $\xi = 0$ Jang provou que:

$$E\left[e^{-\upsilon X(t)} \mid X_0\right] = \exp[-k_1(t)X_0]e^{-\rho t}{k_2}^{2b/\sigma^2} \times k_3^a(t) \times k_4^b(t) \times k_5^c(t) \times k_6^d(t)\ ,$$

onde, por exemplo, vem que,

$$k_3(t) = \frac{(\sqrt{a^2}-a)(\alpha_1 e^{\sqrt{a^2}+\upsilon}) + (\sqrt{a^2}+a)(\upsilon e^{\sqrt{a^2}} + \alpha_1) + (\alpha_1\sigma^2\upsilon)(e^{\sqrt{a^2}}-1)}{2\sqrt{a^2}}$$

Calculado para todos os termos, derivando em ordem a υ

tomando $\upsilon = 0$, vem:

$$E[X(t)|X(0)] = e^{at}X(0) + \left(\frac{\beta_1\rho}{\alpha_1} + \frac{\beta_2\rho}{\alpha_2} + b\right)\frac{e^{at}-1}{a}$$

Para o calculo da variância basta obter o segundo momento de $X(t)$ derivando a expressão anterior em ordem a $\upsilon = 0$, donde se obtém:

$$\begin{aligned}
Var[X(t)|X(0)] &= \frac{e^{at}-1}{a}\left(\sigma^2\left(e^{at}X_0+\frac{b}{2}\frac{e^{at}-1}{a}\right)+\right.\\
&+\frac{2a+\alpha_1\sigma^2}{2}\left(\frac{2ae^{at}+\alpha_1\sigma^2(e^{at}-1)}{2a}+1\right)\left(\frac{\beta_1\rho}{a\alpha_1^2}-\frac{\sigma^2\beta_1\rho}{a(\alpha_1\sigma^2+2a)\alpha_1}\right)+\\
&+\frac{2a+\alpha_2\sigma^2}{2}\left(\frac{2ae^{at}+\alpha_2\sigma^2(e^{at}-1)}{2a}+1\right)\\
&\left.+\left(\frac{\beta_2\rho}{a\alpha_2^2}-\frac{\sigma^2\beta_2\rho}{a(\alpha_2\sigma^2+2a)\alpha_2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Assumindo que $X_0 = 0$,$b = 0$ e $a = \mu$ obteremos

$$E[L(t)] = \left(\frac{\beta_1\rho}{\alpha_1}+\frac{\beta_2\rho}{\alpha_2}\right)\frac{e^{\mu t}-1}{\mu}$$

$$\begin{aligned}
Var[L(t)] &= \frac{e^{\mu t}-1}{\mu}\left(\frac{2\mu+\alpha_1\sigma^2}{2}\left(\frac{2\mu e^{\mu t}+\alpha_1\sigma^2(e^{\mu t}-1)}{2\mu}+1\right)\left(\frac{\beta_1\rho}{\mu\alpha_1^2}-\frac{\sigma^2\beta_1\rho}{\mu(\alpha_1\sigma^2+2\mu)\alpha_1}\right)\right.\\
&\left.+\frac{2\mu+\alpha_2\sigma^2}{2}\left(\frac{2\mu e^{\mu t}+\alpha_2\sigma^2(e^{\mu t}-1)}{2\mu}+1\right)\left(\frac{\beta_2\rho}{\mu\alpha_2^2}-\frac{\sigma^2\beta_2\rho}{\mu(\alpha_2\sigma^2+2\mu)\alpha_2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Podemos ainda obter a esperança e a variância dos montantes de indemnizações agregados acumulados até ao instante t quando sujeitos a uma taxa de juro determinística se considerarmos $\sigma = 0$ e $\mu = \delta$. Obtemos então o processo atrás denotado por $\{M_t,\ t \geq 0\}$ e

$$E[M_t] = \left(\frac{\beta_1\rho}{\alpha_1}+\frac{\beta_2\rho}{\alpha_2}\right)\frac{e^{\delta t}-1}{\delta}$$

$$Var[M_t] = \left(\frac{2\beta_1\rho}{\alpha_1^2}+\frac{2\beta_2\rho}{\alpha_2^2}\right)\frac{e^{2\delta t}-1}{2\delta}$$

3.3 Resultados de uma Aplicação

Considerando o processo de difusão por saltos $\{M_t,\ t \geq 0\}$ e $\{L_t,\ t \geq 0\}$ estudados, vamos agora determinar o valor médio do montante de indemnizações agregadas acumuladas a uma taxa de juro determinístico ($E[M_t]$) e a sua variância ($Var[M_t]$) assim como para uma taxa de juro estocástica ($E[L_t]$ e $Var[L_t]$). Para uma análise de resultados vamos fixar os parâmetros μ, δ, ρ e t com os valores considerados por Jang ([7]), i.e.,

$$\mu = \delta = 0.05, \quad \rho = 50 \quad \text{e} \quad t = 1$$

e vamos fazer variar os restantes com os valores

- $\alpha_1 = 0.1, 0.01, 0.001$ $\alpha_2 = 0.9, 0.09, 0.009$

- $\beta_1 = 0.7, 0.5, 0.3$ $\beta_2 = 1 - \beta_1$

Nas Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3 encontram-se discriminados os valores obtidos quando $\alpha_1 = 0.001$, $\alpha_1 = 0.01$ e $\alpha_1 = 0.1$, respectivamente.

alpha1	alpha 2	beta1	mu=delta	rho	t	sigma	E(Lt)	Var(Lt)
0,001	0,009	**0,7**	0,05	50	1	0	37598,8	74009164,6
0,001	0,009	**0,7**	0,05	50	1	0,5	37598,8	74013983,9
0,001	0,009	**0,7**	0,05	50	1	0,7	37598,8	74018610,5
0,001	0,009	**0,7**	0,05	50	1	1	37598,8	74028441,9
0,001	0,009	**0,5**	0,05	50	1	0	28483,9	53234662,2
0,001	0,009	**0,5**	0,05	50	1	0,5	28483,9	53238313,2
0,001	0,009	**0,5**	0,05	50	1	0,7	28483,9	53241818,2
0,001	0,009	**0,5**	0,05	50	1	1	28483,9	53249266,3
0,001	0,009	**0,3**	0,05	50	1	0	19369,1	32460159,9
0,001	0,009	**0,3**	0,05	50	1	0,5	19369,1	32462642,6
0,001	0,009	**0,3**	0,05	50	1	0,7	19369,1	32465026,0
0,001	0,009	**0,3**	0,05	50	1	1	19369,1	32470090,6
0,001	0,09	**0,7**	0,05	50	1	0	36060,7	73623537,9
0,001	0,09	**0,7**	0,05	50	1	0,5	36060,7	73628160,0
0,001	0,09	**0,7**	0,05	50	1	0,7	36060,7	73632597,3
0,001	0,09	**0,7**	0,05	50	1	1	36060,7	73642026,6
0,001	0,09	**0,5**	0,05	50	1	0	25920,4	52591951,1
0,001	0,09	**0,5**	0,05	50	1	0,5	25920,4	52595273,5
0,001	0,09	**0,5**	0,05	50	1	0,7	25920,4	52598463,0
0,001	0,09	**0,5**	0,05	50	1	1	25920,4	52605240,7
0,001	0,09	**0,3**	0,05	50	1	0	15780,1	31560364,3
0,001	0,09	**0,3**	0,05	50	1	0,5	15780,1	31562386,9
0,001	0,09	**0,3**	0,05	50	1	0,7	15780,1	31564328,7
0,001	0,09	**0,3**	0,05	50	1	1	15780,1	31568454,9
0,001	0,9	0,7	0,05	50	1	0	35906,9	73619681,6
0,001	0,9	0,7	0,05	50	1	0,5	35906,9	73624284,1
0,001	0,9	0,7	0,05	50	1	0,7	35906,9	73628702,4
0,001	0,9	0,7	0,05	50	1	1	35906,9	73638091,4
0,001	0,9	**0,5**	0,05	50	1	0	25664,0	52585524,0
0,001	0,9	**0,5**	0,05	50	1	0,5	25664,0	52588813,5
0,001	0,9	**0,5**	0,05	50	1	0,7	25664,0	52591971,5
0,001	0,9	**0,5**	0,05	50	1	1	25664,0	52598682,2
0,001	0,9	**0,3**	0,05	50	1	0	15421,2	31551366,3
0,001	0,9	**0,3**	0,05	50	1	0,5	15421,2	31553343,0
0,001	0,9	**0,3**	0,05	50	1	0,7	15421,2	31555240,6
0,001	0,9	**0,3**	0,05	50	1	1	15421,2	31559272,9

Figura 3.1: Tabela de valores de $E[L_t]$ e $Var[L_t]$ para diferentes situações de α_2, β_1 e β_2 quando $\alpha_1 = 0.001$

alpha1	alpha 2	beta1	mu=delta	rho	t	sigma	E(Lt)	Var(Lt)
0,01	0,009	**0,7**	0,05	50	1	0	5298,0	1125718,3
0,01	0,009	**0,7**	0,05	50	1	0,5	5298,0	1126397,4
0,01	0,009	**0,7**	0,05	50	1	0,7	5298,0	1127049,4
0,01	0,009	**0,7**	0,05	50	1	1	5298,0	1128434,7
0,01	0,009	**0,5**	0,05	50	1	0	5411,9	1175057,8
0,01	0,009	**0,5**	0,05	50	1	0,5	5411,9	1175751,5
0,01	0,009	**0,5**	0,05	50	1	0,7	5411,9	1176417,4
0,01	0,009	**0,5**	0,05	50	1	1	5411,9	1177832,6
0,01	0,009	**0,3**	0,05	50	1	0	5525,9	1224397,2
0,01	0,009	**0,3**	0,05	50	1	0,5	5525,9	1225105,5
0,01	0,009	**0,3**	0,05	50	1	0,7	5525,9	1225785,5
0,01	0,009	**0,3**	0,05	50	1	1	5525,9	1227230,4
0,01	0,09	**0,7**	0,05	50	1	0	3759,9	740091,6
0,01	0,09	**0,7**	0,05	50	1	0,5	3759,9	740573,6
0,01	0,09	**0,7**	0,05	50	1	0,7	3759,9	741036,2
0,01	0,09	**0,7**	0,05	50	1	1	3759,9	742019,4
0,01	0,09	**0,5**	0,05	50	1	0	2848,4	532346,6
0,01	0,09	**0,5**	0,05	50	1	0,5	2848,4	532711,7
0,01	0,09	**0,5**	0,05	50	1	0,7	2848,4	533062,2
0,01	0,09	**0,5**	0,05	50	1	1	2848,4	533807,0
0,01	0,09	**0,3**	0,05	50	1	0	1936,9	324601,6
0,01	0,09	**0,3**	0,05	50	1	0,5	1936,9	324849,9
0,01	0,09	**0,3**	0,05	50	1	0,7	1936,9	325088,2
0,01	0,09	**0,3**	0,05	50	1	1	1936,9	325594,7
0,01	0,9	0,7	0,05	50	1	0	3606,1	736235,4
0,01	0,9	0,7	0,05	50	1	0,5	3606,1	736697,6
0,01	0,9	0,7	0,05	50	1	0,7	3606,1	737141,3
0,01	0,9	0,7	0,05	50	1	1	3606,1	738084,2
0,01	0,9	**0,5**	0,05	50	1	0	2592,0	525919,5
0,01	0,9	**0,5**	0,05	50	1	0,5	2592,0	526251,8
0,01	0,9	**0,5**	0,05	50	1	0,7	2592,0	526570,7
0,01	0,9	**0,5**	0,05	50	1	1	2592,0	527248,5
0,01	0,9	**0,3**	0,05	50	1	0	1578,0	315603,6
0,01	0,9	**0,3**	0,05	50	1	0,5	1578,0	315805,9
0,01	0,9	**0,3**	0,05	50	1	0,7	1578,0	316000,1
0,01	0,9	**0,3**	0,05	50	1	1	1578,0	316412,7

Figura 3.2: Tabela de valores de $E[L_t]$ e $Var[L_t]$ para diferentes situações de α_2, β_1 e β_2 quando $\alpha_1 = 0.01$

alpha1	alpha 2	beta1	mu=delta	rho	t	sigma	E(Lt)	Var(Lt)
0,1	0,009	**0,7**	0,05	50	1	0	2067,9	396883,9
0,1	0,009	**0,7**	0,05	50	1	0,5	2067,9	397148,9
0,1	0,009	**0,7**	0,05	50	1	0,7	2067,9	397403,4
0,1	0,009	**0,7**	0,05	50	1	1	2067,9	397944,1
0,1	0,009	**0,5**	0,05	50	1	0	3104,7	654461,7
0,1	0,009	**0,5**	0,05	50	1	0,5	3104,7	654859,7
0,1	0,009	**0,5**	0,05	50	1	0,7	3104,7	655241,7
0,1	0,009	**0,5**	0,05	50	1	1	3104,7	656053,6
0,1	0,009	**0,3**	0,05	50	1	0	4141,6	912039,6
0,1	0,009	**0,3**	0,05	50	1	0,5	4141,6	912570,5
0,1	0,009	**0,3**	0,05	50	1	0,7	4141,6	913080,1
0,1	0,009	**0,3**	0,05	50	1	1	4141,6	914163,0
0,1	0,09	**0,7**	0,05	50	1	0	529,8	11257,2
0,1	0,09	**0,7**	0,05	50	1	0,5	529,8	11325,1
0,1	0,09	**0,7**	0,05	50	1	0,7	529,8	11390,3
0,1	0,09	**0,7**	0,05	50	1	1	529,8	11528,8
0,1	0,09	**0,5**	0,05	50	1	0	541,2	11750,6
0,1	0,09	**0,5**	0,05	50	1	0,5	541,2	11819,9
0,1	0,09	**0,5**	0,05	50	1	0,7	541,2	11886,5
0,1	0,09	**0,5**	0,05	50	1	1	541,2	12028,1
0,1	0,09	**0,3**	0,05	50	1	0	552,6	12244,0
0,1	0,09	**0,3**	0,05	50	1	0,5	552,6	12314,8
0,1	0,09	**0,3**	0,05	50	1	0,7	552,6	12382,8
0,1	0,09	**0,3**	0,05	50	1	1	552,6	12527,3
0,1	0,9	0,7	0,05	50	1	0	376,0	7400,9
0,1	0,9	0,7	0,05	50	1	0,5	376,0	7449,1
0,1	0,9	0,7	0,05	50	1	0,7	376,0	7495,4
0,1	0,9	0,7	0,05	50	1	1	376,0	7593,7
0,1	0,9	**0,5**	0,05	50	1	0	284,8	5323,5
0,1	0,9	**0,5**	0,05	50	1	0,5	284,8	5360,0
0,1	0,9	**0,5**	0,05	50	1	0,7	284,8	5395,0
0,1	0,9	**0,5**	0,05	50	1	1	284,8	5469,5
0,1	0,9	**0,3**	0,05	50	1	0	193,7	3246,0
0,1	0,9	**0,3**	0,05	50	1	0,5	193,7	3270,8
0,1	0,9	**0,3**	0,05	50	1	0,7	193,7	3294,7
0,1	0,9	**0,3**	0,05	50	1	1	193,7	3345,3

Figura 3.3: Tabela de valores de $E[L_t]$ e $Var[L_t]$ para diferentes situações de α_2, β_1 e β_2 quando $\alpha_1 = 0.1$

Pelas tabelas vemos que as companhias de seguros terão o mesmo valor médio para os montantes das reclamações agregadas, se considerarmos uma taxa de juro determinístico ou estocástico desde que o coeficiente de difusão seja igual ao coeficiente de impulso. Porém, a variabilidade aumenta ligeiramente se a taxa de juro passa a ser estocástica.

As maiores variabilidades são encontradas quanto maior for o valor médio para os montantes das reclamações agregadas.

Para cada valor de α_1 observamos que a variabilidade dos montantes de indemnização é menor quando α_2 toma valor 0.9. Tal sugere que o melhor modelo para o tamanho dos saltos, no sentido de obter a menor variabilidade, é quando α_1 e α_2 tomam o maior valor entre os três propostos para cada α.

À medida que o α_1 aumenta, a média e a variabilidade do montante de indemnizações diminui. Observamos também que quanto menor for o β_1, menor será a média e a variabilidade de $L(t)$, sendo β_1 o peso de uma das exponenciais na mistura.

Capítulo 4

Conclusões

Muitos dos problemas reais são modelados usando a teoria de processos estocásticos. Para a realização deste trabalho, começámos por introduzir alguns conceitos básicos em processos estocásticos, tais como estacionaridade, independência, incrementos e alguns exemplos clássicos de processos estocásticos. A partir da definição do movimento Browniano, ou processo de Wiener, processo Gaussiano, Markoviano, de incrementos independentes e estacionários, construímos alguns processos derivados deste (processos de difusão), a saber, movimento Browniano integrado, movimento Browniano Geométrico, Ponte Browniana, Processo de Ornstein-Uhlenbeck e Ruído Branco. Concluímos que tanto o movimento Browniano Integrado, a Ponte Browniana e o Processo de Ornstein-Uhlenbeck são processos de Markov Gaussianos, sendo o movimento Browniano Integrado e o movimento Browniano Geométrico de incrementos não independentes nem estacionários; por outro lado, o processo de Ornstein-Uhlenbeck apesar de ser de incrementos independentes não é estacionário.

Para aplicação aos Seguros, fizemos uma breve abordagem aos conceitos de Seguros e Teoria de Risco, entre os modelos de risco individuais e colectivos para o cálculo dos montantes das indemnizações agregadas. Um pequeno exemplo de cálculo dos montantes das indemnizações agregadas para o modelo de risco colectivo foi conseguido usando a função geradora de momentos. Ainda, dentro da aplicação aos Seguros e seguindo o trabalho de Jang ([7]), modelámos um processo usando o processo de difusão por saltos, a transformada conjunta de Laplace e uma mistura da distribuição exponencial, e ainda os momentos dos montantes dos prémios acumulados e agregados até o instante t, considerando uma taxa de juro estocástica. Verificámos que se considerarmos o coeficiente de difusão igual ao coeficiente de impulso, os valores médios dos montantes das reclamações agregadas e acumuladas sao iguais e que ao maior valor médio dos montantes das reclamações agregadas e acumuladas está associada a maior variabilidade.

Bibliografia

[1] Apostol, Tom M. (1985)*Calculus.* Vol I,II. Editora Reverté.Barcelona

[2] De Souza, Silney*Seguros- Contabilidade, actuaria e auditoria.* Editora Saraiva.

[3] Dos Reis, Egidio A. *Ciências Actuariais: Modelos para Seguros.* ISEG. Universidade Técnica de Lisboa.

[4] Fernandez, Pedro J. (1975). *Introdução aos Processos Estocásticos* Dedalus-Acervo; Madrid

[5] Fraga Alves, M.I. *Texto de Apoio da disciplina Teoria do Risco.* DEIO. Universidade de Lisboa.

[6] Fraga, E. (2006) Uma aplicação da Teoria de Valores extremos para Avaliação do risco de Contratos de Resseguro. *R. Bras. Risco e Seg.*, Rio de Janeiro, v. 2, n. 3, 1-22. Disponível em http://www.rbrs.com.br/paper/paper_interna.cfm?id=51 (acedido em Junho de 2009).

[7] Jang, J (2007). Jump diffusion processes and their applications in insurance and finance. *Insurance: Mathematics and Economics*, 41, 62 - 70.

[8] Jang, J., (2004). Martingale approach for moments of discounted aggregate claims. *Journal of Risk and Insurance* 71 (2), 201 - 211.

[9] Klüppelberg, C., Kyprianou, A., Maller, R., (2004). Ruin probabilities and overshoots for general Lévy insurance risk processes. *Annals of Applied Probability* 14, 1766 - 1801.

[10] Lange, Kenneth *Applied Probability.* Universitext. Springer.

[11] Lefebvre, M. (2007). *Applied Stochastic Process.* Universitext. Springer. NY.

[12] pt.wikipedia.org/wiki/Ci%C3%AAncias_atuariais (acedido em Junho de 2009).